



جامعة الزقازيق
كلية العلوم
قسم الرياضيات



جبر وهندسة

إعداد

قسم الرياضيات

٢٠٢٥ - ٢٠٢٦

الباب الأول

التباديل والتوافيق

تعتمد كثير من المشاكل الرياضية على الإجابة عن السؤال الآتى .
 كم عدد المجموعات المختلفة التى يمكن تكوينها من عدد معين من الأشياء ؟
 فمثلا كم عينة كل منها مكونة من 15 طالب يمكن تكوينها من 50 طالب؟
 وتزودنا نظرية التباديل والتوافيق بالإجابة عن مثل هذا السؤال .

التباديل

هو عدد الترتيبات التى يمكن تكوينها من مجموعة من الأشياء (عددها n) مأخوذة r فى كل مرة ونستخدم الرمز ${}^nL_r$ للدلالة عن التباديل .

الرمز $n!$ يدل على عدد التباديل التى يمكن تكوينها من عدد من الأشياء مأخوذة كلها فى كل مرة . فمثلا ${}^4L_2$ تدل على عدد التباديل التى يمكن تكوينها من أربعة أشياء مأخوذة إثنان فى كل مرة وتعرف ${}^nL_r$ كالاتى

$${}^nL_r = n (n-1) (n-2) \dots (n-r+1)$$

ونلاحظ أن عدد العوامل فى الطرف الأيسر يساوى r تبدأ بالعدد n ثم ينقص كل منها واحداً عن العدد السابق له .

أما $n!$ أى n من الأشياء جميعها كل مره وتعرف كالاتى .

$$n! = {}^nL_n = n (n-1) (n-2) \dots 3 \times 2 \times 1$$

مثال (١): أوجد ${}^4L_4, {}^7L_4, {}^6L_2$

الحل

$${}^6L_2 = 6 \times 5 = 30 , \quad {}^7L_4 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

$${}^4L_4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$(1) 0! = 1 \quad (2) {}^nL_0 = 1$$

لاحظ أن

مثال (٢): ما عدد الأعداد المختلفة التي يمكن تكوينها باستعمال أربعة أرقام مختلفة من لأرقام الستة 1, 2, 3, 4, 5, 6

الحل

لدينا ستة أرقام مختلفة وعلينا أن نحدد عدد تباديلها مأخوذة أربعة في كل مرة فنجد أن النتيجة المطلوبة هي ${}^6L_4 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ حيث

$$n! = n(n-1)!$$

نتيجة :

البرهان

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)(n-2) \dots \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= n[(n-1)(n-2) \dots 3 \times 2 \times 1] \\ &= n(n-1)! \end{aligned}$$

$$\frac{(n+2)!}{n!}$$

مثال (٣): اختصر

الحل

$$\begin{aligned} \therefore (n+2)! &= (n+2)(n+1)n! \\ \therefore \frac{(n+2)!}{n!} &= \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+2)(n+1) \end{aligned}$$

مثال (٤): إذا كان $n! = 720$ فأوجد قيمة n

الحل

$$\begin{aligned} 720 &= 1 \times 720 \\ &= 1 \times 2 \times 360 \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times 120 \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 30 \\ &= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 6! \\ \therefore n! &= 6! \Rightarrow n = 6 \end{aligned}$$

العلاقة بين $n!$, ${}^nL_r$

$${}^nL_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{مثال (٥): برهن أن}$$

﴿ البرهان ﴾

$$\begin{aligned} {}^nL_r &= n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

مثال (٦): إذا كان ${}^nL_2 = 56$ فأوجد قيمة n

﴿ الحل ﴾

$$\therefore {}^nL_2 = n(n-1)$$

$$n(n-1) = 56 \Rightarrow n^2 - n - 56 = 0$$

$$\therefore (n-8)(n+7) = 0$$

ومن ذلك نجد أن (مرفوض) $n = -7$ or $n = 8$

مثال (٧): إذا كان ${}^{12}L_r = 1320$ فأوجد قيمة r

﴿ الحل ﴾

$$1320 = 12 \times 11 \times 10 = {}^{12}L_3$$

$$\therefore {}^{12}L_r = {}^{12}L_3 \Rightarrow r = 3$$

التوافيق

فيما يلي سوف نحاول معرفة عدد المجموعات الجزئية والتي عدد عناصرها يساوي r التي يمكن تكوينها من مجموعة عدد عناصرها n حيث $0 \leq r \leq n$ وسوف نرمز لهذا العدد بالرمز ${}^nC_r$ وفيما يلي أمثلة توضح ذلك .

مثال (١): بفرض أن $X = \{a, b, c, d\}$ كم مجموعة جزئية عدد

عناصر كلاً منها يساوي 1 يمكن تكوينها من المجموعة X ؟

﴿ الحل ﴾

المجموعات الجزئية من المجموعة X والتي تحتوى كل منها على عنصر واحد فقط هي $\{d\}$, $\{c\}$, $\{b\}$, $\{a\}$ وعلى هذا فتوجد أربعة مجموعات جزئية من المجموعة X وتحتوى كل منها على عنصر واحد فقط أى أن

$${}^4C_1 = 4$$

مثال (٢): أكتب كل المجموعات الجزئية للمجموعة X حيث $X = \{a, b, c, d\}$ والتي تحتوى كل منها على عنصرين . كم عدد المجموعات التى حصلت عليها ؟

الحل

المجموعات الجزئية المطلوبة هي :

$\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$

عدد هذه المجموعات يساوى 6 أى أن ${}^4C_2 = 6$

مثال (٣): مدرسه بها أربعة طلاب يجيدون لعب الكاراتيه أراد المدرب أن يختار منهم مجموعة تتكون من ثلاث طلاب لتمثيل المدرسة فى هذه اللعبة . كم عدد المجموعات التى يمكن أن يختار من بينها ؟

الحل

لنرمز لمجموعة الطلاب الأربعة بالرمز S حيث $S = \{a, b, c, d\}$

يمكن للمدرب أن يختار مجموعة من بين المجموعات الآتية

$\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$

ومن ثم فإن عدد المجموعات التى يمكن للمدرب الاختيار من بينها هي 4 أى أن ${}^4C_3 = 4$

معنى التوافيق

كل مجموعة تتكون من كل أو من جزء من الأشياء بصرف النظر عن ترتيب مفردات المجموعة تسمى توفيقاً . فمثلاً $(a,b) \& (b,a)$ تعبر عن تبديلين أما (a,b) فتعبر عن توفيق واحد .

العلاقة بين التباديل والتوافيق

حيث أن كلاً من التباديل والتوافيق هو اختيار r من الأشياء من بين n من الأشياء مع مراعاة الترتيب أو من إهماله وفقاً لما سبق شرحه فإنه يوجد علاقة وثيقة بين التباديل والتوافيق وفيما يلي نوضح هذه العلاقة .

إذا كانت X هي مجموعة من العناصر التي عددها n يكون عدد المجموعات الجزئية للمجموعة X والتي تحتوى كل منها على r من العناصر ($n \geq r$) هو ${}^nL_r$ مأخوذة راءاً راء هو ${}^nL_r$.

والسؤال الآن ما هي العلاقة بين ${}^nC_r$, ${}^nL_r$ ؟

لاحظ أنه بينما يهنا الترتيب عند إجراء التباديل لا يهتم به عند إجراء التوافيق إذا أجرينا على كل مجموعة من المجموعات الجزئية السابقة جميع التباديل الممكنة على عناصرها والتي تساوى $r!$ فإن عدد التباديل التي يمكن تكوينها على عناصر المجموعة X مأخوذة راءاً راء يساوى ${}^nC_r r!$

أى أن:

$${}^nL_r = {}^nC_r r! , \quad \therefore {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$${}^8C_2 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2 \times 1 \times 6!} = 28 \quad \text{فمثلاً:}$$

مثال (٤): أعلنت شركة عن وجود خمسة وظائف خالية بها تقدم لهذه الوظيفة تسعة أشخاص بكم طريقه يمكن اختيار خمسة أشخاص .

الحل

عدد الطرق هو ${}^9C_5$

$${}^9C_5 = \frac{9!}{5!4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

$${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$$

نتيجة:

﴿ البرهان ﴾

$${}^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! [n-(n-r)]!} = \frac{n!}{r! (n-r)!} = {}^nC_r$$

ملحوظة (١): في العلاقة السابقة إذا وضعنا $n = r$

$${}^nC_n = {}^nC_0 = 1$$

فيكون

ملحوظة (٢): إذا كانت ${}^nC_r = {}^nC_h$ فإن $r = h$ or $r + h = n$

$${}^{30}C_{2r-1} = {}^{30}C_{r+13} \quad \text{مثال (٥): إذا كان}$$

﴿ الحل ﴾

$$\therefore {}^{30}C_{2r-1} = {}^{30}C_{r+13}$$

$$2r - 1 = r + 13 \Rightarrow r = 14$$

باستخدام ملحوظة (٢) نجد أن

$$30 = 2r - 1 + r + 13 = 3r - 12$$

$$\therefore 3r = 30 - 12 = 18 \Rightarrow r = 6$$

$$\frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r}$$

نتيجة:

﴿ البرهان ﴾

$$= \frac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \frac{n!}{r! (n-r)!} \times \frac{(r-1)! (n-r+1)!}{n!}$$

الطرف الأيسر

$$= \frac{(r-1)!(n-r+1)!}{r! (n-r)!} = \frac{n-r+1}{r} = \frac{(r-1)! (n-r+1) (n-r)!}{r (r-1)! (n-r)!}$$

$$\frac{{}^{30}C_7}{{}^{30}C_6} = \frac{30-7+1}{7} = \frac{24}{7}$$

فمثلاً

مثال (٦): أثبت أن ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

الحل

$${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{n![(n-r+1)+r]}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!}$$

مثال (٧): بكم طريقة يمكن إنتخاب لجنة للطلبة بها 6 أعضاء من بين 20 طالباً وعشرة طالبات بحيث تتكون اللجنة من 4 طلبة وطالبات .

الحل

يمكن إنتخاب 4 طلبة من 20 طالباً بعدد من الطرق .

$${}^{20}C_4 = \frac{20!}{4! 16!} = 4845$$

ويمكن إنتخاب طالبتين من عشرة طالبات بعدد من الطرق

$${}^{10}C_2 = \frac{10!}{2! 8!} = 45$$

إذن عدد طرق إنتخاب اللجنة يساوى

$${}^{20}C_4 \times {}^{10}C_2 = 4845 \times 45 = 218025$$

مثال (٨): بكم طريقة يمكن إنتخاب لجنتين تتكون كل منها من 3 أشخاص من بين 12 شخصاً بحيث لا يدخل شخصاً فى كلتا اللجنتين .

الحل

$${}^{12}C_3 = \frac{12!}{3! 9!} = 220$$

يمكن إنتخاب اللجنة الأولى بعدد من الطرق:

فإذا انتخبنا ثلاث يتبقى 9 أشخاص ينتخب منهم ثلاثة للجنة الثانية بعدد طرق

$${}^9C_3 = \frac{9!}{3! 6!} = 84$$

طريقة

عدد الطرق الانتخاب اللجنتين يساوى: طريقة $220 \times 84 = 18480$

تمارين

[1] ما عدد الترتيب التى يمكن عملها من أرقام العدد 7654321

[2] بكم طريقة يستطيع أن يجلس 5 أشخاص على 5 كراسى .

[3] أوجد قيمة ${}^nL_0 + {}^nL_1 + {}^nL_2$ إذا علم أن $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 72$

[4] إذا كان ${}^9L_r = 60480$ فأوجد $r!$

[5] أحسب قيم كلاً من ${}^{12}C_5$, ${}^{20}C_4$, ${}^{10}C_5$

[6] إذا كانت ${}^nC_2 = 435$ فأوجد قيمة n

[7] بكم طريقة يمكن إنتخاب 3 أشخاص من بين 10 أشخاص .

[8] بكم طريقة يمكن إنتخاب لجنتين تتكون كل منهما من أربعة أشخاص من بين عشرة أشخاص بحيث لا يدخل شخص فى كلتا اللجنتين.

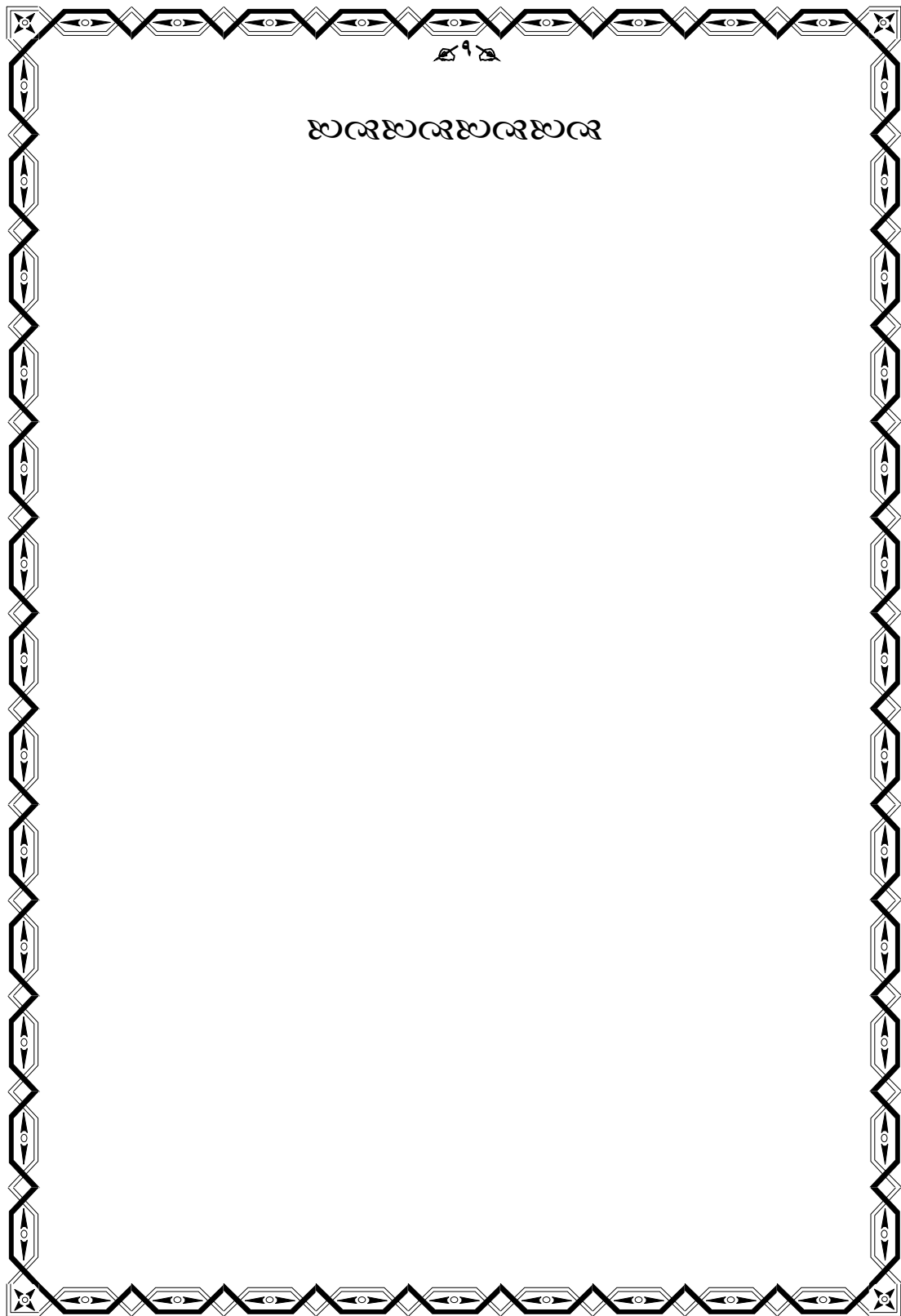
[9] بكم طريقة يمكن إنتخاب لجنة بها ستة أعضاء من بين عشرة أطباء وخمسة مدرسين بحيث تتكون اللجنة من أربعة أطباء وأثنين من المدرسين.

[10] أثبت أن ${}^nC_r + {}^nC_{r+1} = {}^{n+1}C_{r+1}$

ومن ثم أوجد قيمة $\frac{{}^{17}C_6 + {}^{17}C_5}{{}^{18}C_5}$

[11] أثبت أن $\frac{{}^nC_r}{{}^{n-1}C_{r-1}} = \frac{n}{r}$

ومن ثم أوجد قيمة $\frac{{}^{23}C_5 + {}^{22}C_4}{{}^{22}C_4 + {}^{21}C_3}$



ಬರಬರಬರಬರ

الباب الثانى

نظرية ذات الحدين

تعريف:

أى مقدار جبرى مكون من حدين مثلاً $(x + y)$ يسمى بذى الحدين، ومفكوك هذا المقدار عند رفعة إلى أى قوة يسمى بمفكوك ذى الحدين. وحتى نتوصل إلى مفكوك ذى الحدين نجرى عمليات الضرب كى نستنتج منها القانون الذى سوف نستعمله:-

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2 y + 3x y^2 + y^3$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4x y^3 + y^4$$

ومن هذه النتائج نستنتج الآتى :-

- (١) عدد الحدود فى المفكوك = القوة + ١
- (٢) إن مجموع أسس x, y فى كل حد فى المفكوك يساوى الأس المرفوع إليه المفكوك.
- (٣) إن أس الحد الأول فى المفكوك يبدأ بأس المفكوك ثم يتناقص بمقدار واحد فى كل حد بينما أس الحد الثانى يبدأ بصفر ثم يتزايد بمقدار واحد فى كل حد حتى نصل إلى آخر حد فيكون أسه هو نفس الأس المرفوع إليه المفكوك.
- (٤) إن معامل كل حد فى المفكوك يساوى عدد التوافيق من عدد يساوى أس المفكوك مأخوذاً صفر فى كل مره ثم ١ فى كل مره ثم ٢ فى كل مره حتى نصل إلى آخر حد فى المفكوك.

ومن الملاحظات السابقة يمكن استنتاج مفكوك ذات الحدين على الصورة.

$$(x + y)^n = x^n + {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + {}^nC_3 x^{n-3} y^3 + \dots + y^n$$

وليجاد مفكوك المقدار $(x - y)^n$ نكتبه على الصورة $[x + (-y)]^n$ ويكون مساوياً للمقدار .

$$x^n - {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 - {}^nC_3 x^{n-3} y^3 + \dots \pm y^n .$$

مثال (١): أكتب مفكوك $(3x - 2y)^5$

➡ الحل ➡

$$\begin{aligned} (3x-2y)^5 &= (3x)^5 + {}^5C_1 (3x)^4 (-2y) + {}^5C_2 (3x)^3 (-2y)^2 + \\ &\quad {}^5C_3 (3x)^2 (-2y)^3 + {}^5C_4 (3x) (-2y)^4 + (-2y)^5 \\ &= 243 x^5 - 810 x^4 y + 1080 x^3 y^2 - 720 x^2 y^3 + 240 x y^4 - 32 y^5 \\ &= 243 x^5 - 810 x^4 y + 1080 x^3 y^2 - 720 x^2 y^3 + 240 x y^4 - 32 y^5 \end{aligned}$$

مثال (٢): أوجد الحد الذى درجته الترتيبه r فى مفكوك $(x + y)^n$

➡ الحل ➡

أُس y يقل 1 عن الدرجة الترتيبه للحد

إذن : فى هذا الحد يكون y^{r-1} وحيث أن مجموع أس x, y مساوياً للعدد n إذن أس x يكون مساوياً $n-(r-1)$ أى $x^{n-(r-1)}$ ومعامل الحد يكون مساوياً ${}^nC_{r-1}$

إذن الحد المطلوب هو $T_r = {}^nC_{r-1} x^{n-(r-1)} y^{r-1}$

مثال (٣): أوجد الحد الرابع فى مفكوك $(x-2y)^6$

➡ الحل ➡

باستخدام المثال السابق يكون الحد الرابع

$$T_4 = {}^6C_3 x^6 (-2y)^{4-1} = -160 x^3 y^3$$

مثال (٤): أوجد معامل x^4 مفكوك $(3x-2y)^9$

➡ الحل ➡

حيث أن مجموع أس x, y يكون مساوياً 9 وحيث أن أس x مساوياً 4 إذا أس y يكون مساوياً 5 وهذا يتحقق عندما يكون الحد هو الحد السادس في المفكوك وبذلك يكون معامل x^4 هو

$${}^9C_5 (3)^4 (-2)^5 = -326592$$

مثال (٥): أوجد الحد السابع في مفكوك $(x^2 - 2x)^9$

الحل

$$\begin{aligned} T_7 &= {}^9C_6 (x^2)^{5-(7-1)} (-2x)^{7-1} = {}^9C_6 x^6 (-2)^6 x^6 \\ &= (-2)^6 {}^9C_6 x^{12} = 5376 x^{12} \end{aligned}$$

مثال (٦): أوجد الحد الخامس في مفكوك $\left(3x - \frac{1}{x}\right)^7$

الحل

$$T_r = {}^nC_{r-1} x^{n-(r-1)} y^{r-1}$$

$$T_5 = {}^7C_4 (3x)^3 \left(\frac{-1}{x}\right)^4$$

إذن الحد الخامس يساوي

$$= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times (27x^3) \times \left(\frac{1}{x^4}\right) = \frac{945}{x}$$

الحد الأوسط في مفكوك ذي الحدين

إذا كان أس المقدار عدداً زوجياً يكون الحد الأوسط هو الحد الذي رتبته $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$ أما إذا كان أس المقدار عدداً فردياً هناك حدين أوسطين وهما اللذين

ترتيبتهما $\left(\frac{n+1}{2}\right), \left(\frac{n+3}{2}\right)$

مثال (٧): أوجد الحد الأوسط في مفكوك $(3 + 2x)^9$

الحل

هناك حدين أوسطين ترتيبهما

$$\frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

الحد الخامس

$$\frac{9+3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

الحد السادس

$$T_5 = {}^9C_4 (3)^5 (2x)^4 = 489888 x^4$$

$$T_6 = {}^9C_5 (3)^4 (2x)^5 = 326592 x^5$$

مثال (٨): إذا كان الحدان الأوسطان في مفكوك $\left(8x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$ متساويان

$$x = \frac{1}{2} \text{ أثبت أن}$$

الحل

حيث أن $n = 9$ عدد فردى

T_5, T_6

∴ يوجد حدين أوسطين هما

وحيث أن $T_6 = T_5$

$$\therefore {}^9C_4 \left(\frac{1}{x}\right)^4 (8x^2)^5 = {}^9C_5 \left(\frac{1}{x}\right)^5 (8x^2)^4$$

$$\therefore {}^9C_4 (8x^2) = {}^9C_5 \left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow 8x^3 = \frac{{}^9C_3}{{}^9C_4} = \frac{9-5-1}{5} = 1$$

$$8x^3 = 1 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{8} \quad \therefore x = \frac{1}{2}$$

مثال (٩): في مفكوك $(2 + 3x)^{10}$ حسب قوى x التصاعديه إذا كانت

النسبة بين الحد الأوسط والحد الثالث هي $\frac{28}{15}$ أوجد قيمة x .

الحل

وحيث أن $n = 10$ عدد زوجى إذاً الحد الأوسط هو الحد السادس T_6

$$\therefore \frac{T_6}{T_3} = \frac{28}{15} \quad \therefore \frac{28}{15} = \frac{{}^{10}C_5 (3x)^5 (2)^5}{{}^{10}C_2 (3x)^2 (2)^8} = \frac{252 (27 x^3)}{45 (8)} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

مثال (١٠): إذا كان a, b هما الحدين الأوسطين في مفكوك $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{15}$

حسب قوى x التنازلية فأثبت أن $a + bx^2 = 0$

الحل

حيث أن $n=15$ (عدد فردى) إذاً يوجد حدين أوسطين هما T_8, T_9

$$a = T_8 = {}^{15}C_7 \left(\frac{-1}{x}\right)^7 (x)^8 \quad \therefore a = {}^{15}C_7 (-x) \quad (1)$$

$$b = T_9 = {}^{15}C_8 \left(\frac{-1}{x}\right)^8 (x)^7 \quad \therefore b = {}^{15}C_7 \left(\frac{1}{x}\right) \quad (2)$$

$$a + b x^2 = - {}^{15}C_7 x + {}^{15}C_7 \frac{x^2}{x} = - {}^{15}C_7 x + {}^{15}C_7 x = 0$$

مثال (١١): أوجد الحد المشتمل على x^8 مفكوك $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^{14}$

الحل

نفرض أن الحد المشتمل على x^8 هو T_r

$$T_r = {}^{14}C_{r-1} \left(\frac{2}{x^2}\right)^{r-1} x^{14-(r-1)} = {}^{14}C_{r-1} \frac{2^{r-1}}{x^{2r-2}} x^{15-r}$$

$$= {}^{14}C_{r-1} 2^{r-1} x^{17-3r} \quad \therefore 17 - 3r = 8 \Rightarrow r = 3$$

الحد الثالث هو الحد الذى يحتوى على x^8 وهو يساوى

$$T_3 = {}^{14}C_2 2^2 x^8 = 364 x^8$$

النسبة بين حدين متتاليين في المفكوك

$$\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{n-r+1}{r} \times \frac{x}{a}$$

فى مفكوك $(a + x)^n$ يكون

مثال (١٢): فى مفكوك $\left(2x - \frac{3}{x}\right)^{11}$ أوجد كلاً من $\frac{T_3}{T_2}, \frac{T_7}{T_5}$

الحل

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{11-2+1}{2} \times \frac{\left(\frac{-3}{x}\right)}{2x} = \frac{10}{2} \times \frac{-3}{2x^2} = \frac{-15}{2x^2}$$

$$\frac{T_7}{T_5} = \frac{T_7}{T_6} \frac{T_6}{T_5}$$

$$= \frac{11-6+1}{6} \times \frac{\left(\frac{-3}{x}\right)}{2x} \times \frac{11-5+1}{5} \times \frac{\left(\frac{-3}{x}\right)}{2x} = \frac{63}{20x^4}$$

مثال (١٣): فى مفكوك $(3x - 4)^{27}$ حسب قوى x التنازليه كان معاملاً حدين متتاليين متساويين فى المقدار مختلفان فى الإشارة فما هما الحدين.

الحل

.. معاملاً الحدين متساويين فى المقدار مختلفان فى الإشارة

$$\therefore \frac{\text{معامل } T_{r+1}}{\text{معامل } T_r} = -1$$

$$\frac{27-r+1}{r} \times \frac{(-4)}{3} = -1 \Rightarrow$$

بالضرب التبادلى نجد أن $r = 16$

إذاً الحدين هما T_{16} و T_{17}

نمارين

[١] باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد مفكوك كل مما يأتى:-

$$(i) (a + b)^5 \quad (ii) \left(\frac{x-3}{2x}\right)^6 \quad (iii) (x-2)^7$$

[٢] أوجد :-

أ- الحد الذى يحتوى على x^6 فى مفكوك $(x+y)^{12}$.

ب- الحد الرابع عشر فى مفكوك $(x+y)^{17}$.

[٣] أثبت أنه لا يوجد حد يحتوى على x^6 فى مفكوك $\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{x}\right)^{11}$

[٤] فى مفكوك $(x+y)^n$ إذا كان $\frac{T_3}{T_4} = \frac{2}{3}$, $T_3 = 3 T_2$, فما قيمة n .

[٥] أوجد النسبة بين الحدين التاسع والثامن فى مفكوك $(3+2x)^{15}$ عندما $x=5$.

[٦] أوجد النسبة بين الحد السادس فى مفكوك $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{11}$ والحد الخامس فى

مفكوك $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$ وإذا كانت هذه النسبة تساوى $\frac{88}{625}$ أوجد القيمة

x .

[٧] فى مفكوك $(1+mx)^n$ إذا كانت نسبة معامل T_7 إلى معامل T_5 هى

8: 5 ومعامل T_3 يساوى 112 مره معامل T_1 فأثبت أن $n = 8$ وأوجد

قيمة m .

[٨] إذا كان الحد السابع هو الحد الخالى من x فى مفكوك $\left(\frac{x^3}{5} - \frac{5}{x^2}\right)^n$

أوجد قيمة n ثم أحسب قيمة هذا الحد.



الباب الثالث

الأعداد المركبة

إذا اعتبرنا المعادلة $x^2 + x + 1 = 0$ فإن جذريها هما

$$x_1, x_2 = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$$

وحيث أنه لا يمكن إيجاد الجذر التربيعي لكمية سالبة فيمكن أن نكتب

$$i = \sqrt{-1}, \sqrt{-3} = \sqrt{-1}\sqrt{3}$$

و لذلك فإن أى عدد يحتوى على i يسمى عدد مركب.

$$\therefore x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \mp i\sqrt{3})$$

وأغلب المراجع تستخدم الرمز i للكمية $\sqrt{-1}$ ، وذلك تكريماً للعالم الألماني [لينونارد أويلر 1707 – 1783 Leonard Euler] والذي كان أول من أستخدم هذا الرمز .

$$\text{لاحظ أن } i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i$$

وعلى ذلك فإنه يقال للعدد $a + ib$ (حيث a, b أعداد حقيقية) أنه عدد مركب في الصورة العادية فإذا رمزنا لهذا العدد بالرمز Z فإن

$$Z = a + ib$$

ونسى الجزء الحقيقي في العدد هو a والجزء التخيلي له b

(وليس ib) وسنكتب دائماً $b = \text{Im}(Z), a = \text{Re}(Z)$

حيث Im, Re : تعنى التخيلي والحقيقي.

تعريف (١): يقال لعددین مرکبین أنهما متساویان إذا كان الجزء الحقیقی لأحدهما مساوياً الجزء الحقیقی للآخر وكذلك الجزء التخیلی لأحدهما يساوی الجزء التخیلی للآخر وهذا یعنی أن

$$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow a = a', b = b'$$

الرمز $\Leftrightarrow$ یعنی "إذا وإذا فقط كان"

تعريف (٢): فی العدد المركب $Z = a + ib$ إذا كان $Re Z = 0$ أى $a = 0$ قيل أن العدد Z عدد تخیلی مطلق أى يكون على الصورة $Z = ib$.

وإذا كان $Im Z = 0$ أى $b = 0$ فيقال أن Z عدد حقیقی مطلق.

نستنتج من ذلك أن فئة الأعداد الحقیقية هی فئة جزئية من الأعداد المركبة.

تعريف (٣): اعتبر العدد المركب $Z = a + ib$ فإن العدد $a - ib$ يسمى العدد المرافق للعدد Z ويرمز له بالرمز $\bar{Z}$ أى أن $\bar{Z} = a - ib$.

يتضح من هذا التعبير أن المرافق لأى عدد مركب يختلف عنه فقط فى إشارة الجزء التخیلی.

العمليات الأساسية على الأعداد المركبة

نفرض أن $Z_1 = a_1 + ib_1$, $Z_2 = a_2 + ib_2$

فيكون الجمع $Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

الطرح $Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$

الضرب $Z_1 Z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}$$

بضرب كل من البسط والمقام فى مرافق المقام $\bar{Z}_2$ $= a_2 - ib_2$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$= \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) + i \left(\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right)$$

نظرية (١): حاصل ضرب عددين مترافقين يكون عدداً حقيقياً مطلقاً .

↪ البرهان ↪

نفرض العدد $Z = a + ib$ ومرافقه $\bar{Z} = a - ib$

$$\therefore Z \bar{Z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$$

تعريف: نفرض العدد المركب $Z = a + ib$ الكمية $\sqrt{a^2 + b^2}$ تسمى مقياس العدد المركب Z .

القيمة الموجبة للجزر التربيعى لمقياس العدد Z تسمى القيمة المطلقة أو القيمة العددية للعدد المركب Z . ويرمز لها $|Z|$ بالرمز أى أن

$$|Z| = + \sqrt{a^2 + b^2}$$

نظرية (٢) : نفرض أن $Z_1 = a_1 + ib_1$, $Z_2 = a_2 + ib_2$ فإن:

$$(1) \quad \overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$$

$$(2) \quad \overline{Z_1 Z_2} = \bar{Z}_1 \bar{Z}_2 \quad (3) \quad \overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)} = \frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$$

↪ البرهان ↪

إثبات (١) (٢) سهل وسنثبت الآن (٣) :

$$\overline{Z_1} = a_1 - ib_1, \quad \overline{Z_2} = a_2 - ib_2$$

$$\begin{aligned} L.H.S &= \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right) = \left(\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \right) \\ &= \left(\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \times \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} \right) = \left(\frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \right) \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - i(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R.H.S. &= \frac{\overline{Z_1}}{Z_2} = \frac{a_1 - ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 - ib_1)(a_2 + ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) - i(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right) \end{aligned}$$

مثال (١): ضع الأعداد المركبة الآتية في الصورة العادية

$$(1+i)^3, \quad \frac{1+i}{1-i}, \quad \frac{(3+2i)^2(1-3i)}{(3+i)^2(1-2i)}$$

الحل

$$\begin{aligned} \diamond (1+i)^3 &= 1 + 3i + 3i^2 + 3i^3 \\ &= 1 + 3i - 3i = -2 + 2i \end{aligned}$$

$$\diamond \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$$

$$\diamond \frac{(3+2i)^2(1-3i)}{(3+i)^2(1-2i)} = \frac{(9+12i+4i^2)}{(9+6i+i^2)(1-2i)}$$

$$= \frac{(5+12i)(1-3i)}{(8+6i)(1-2i)} = \frac{41-3i}{20-10i} = 1.57 + 0.7i$$

مثال (٢): أوجد القيمة الحقيقية لكل من x, y إذا علم أنهما تحققان المعادلة:

$$(1+i)(x+2y) - (3-i)(x-y) = 8+3i$$

الحل

$$(1+i)(x+2y) - (3-i)(x-y) = 8+3i$$

$$(-2x+5y-8) + i(2x+y-3) = 0$$

$$a+ib=0 \Rightarrow a=0, b=0 \quad \text{ونحن نعلم أن}$$

$$\therefore -2x+5y-8=0, \quad 2x+y-3=0$$

$$y = \frac{11}{6}, \quad x = \frac{7}{12} \quad \text{وبحل المعادلتين نحصل على}$$

التمثيل الهندسي للأعداد المركبة (شكل أرجاند)

نعتبر المستوى العادي xy ونأخذ على المحورين ox , oy كل الأعداد الحقيقية أى أن العدد المركب Z يمكن اعتباره ثنائى مرتب (a, b) . أى يمثل بنقطة فى هذا المستوى , حيث الإحداثى السينى a هو الجزء الحقيقى للعدد , الإحداثى الصادى b هو الجزء التخيلى للعدد وبهذا نجد أن كل نقطة (a, b) فى المستوى تمثل عدداً مركباً واحداً $Z = a + ib$.

فمثلاً النقطة $(2, 3)$ فى هذا المستوى والتي تمثل العدد المركب $Z = 2 + 3i$ ونلاحظ هنا أن الأعداد التى على الصورة $a + ib$ حيث $b = 0$ تقع كلها على المحور السينى وهذه هى الأعداد الحقيقية المطلقة كذلك الأعداد التى لها $a = 0$ تقع كلها على المحور الصادى. وهذه هى الأعداد

التخيلية المطلقة. لذلك يسمى المحور OX في هذا المستوى بالمحور الحقيقي والمحور OY بالمحور التخيلي.

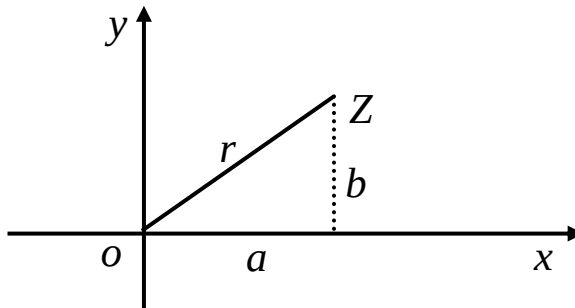
واضح من الشكل أن النقطة $Z = a + ib$ تحدد متجهها OZ يبدأ من النقطة O وينتهى عند النقطة Z وكما نعلم من دراستنا للمتجهات أن

$$|OZ| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

أى أن طول المتجه OZ يكون مساوياً للقيمة المطلقة للعدد المركب Z .

الصورة المثلثية للعدد المركب

وجدنا أن أى عدد مركب يمكن تمثيله فى شكل أرجاند بنقطة Z حيث المتجهة $\overrightarrow{OZ}$ طوله يكون مساوياً للقيمة المطلقة للعدد المركب .



فإذا كان المتجهة $\overrightarrow{OZ}$ يصنع زاوية θ مع المحور الحقيقي هذه الزاوية تسمى : سعة العدد Z ويرمز لها بالرمز $\theta = \text{Arg } Z$.

بالطبع يوجد عدد لا نهائى من القيم لسعة عدد مركب فهى تأخذ القيم : $\theta + 2n\pi$ حيث $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ فإذا كان $Z = a + ib$ فإن $|Z| = \overrightarrow{OZ} = \sqrt{a^2 + b^2}$: وسنرمز دائماً لهذه القيمة العددية بالرمز r أى أن $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ وعلى ذلك من الشكل يتضح أن

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta$$

$$Z = a + ib = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

من ذلك نرى أن أى عدد مركب يمكن وضعه فى الصورة :

$$Z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

ونسمى هذه بالصورة المثلثية للعدد المركب حيث r القيمة المطلقة للعدد Z , θ السعة . وحيث أن إضافة مضاعفات 2π للزاوية θ لا يغير من قيمتها فإن أى قيمة من قيم $\theta + 2n\pi$ تصلح أن تكون سعة العدد Z ولكن سنتفق على أن نأخذ دائماً أقل قيمة للزاوية θ كسعة للعدد Z .

مثال (٣): عين السعة والقيمة المطلقة للأعداد الآتية i , $-6i$

الحل

$$\text{العدد } Z = i = a + ib \quad (\text{عدد تخيلى مطلق})$$

$$\therefore r = 1, \quad \cos \theta = 0, \quad \sin \theta = 1 \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore i = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

$$Z = a + ib \quad \text{بالنسبة للعدد } Z = -6i$$

$$r = 6, \quad \cos \theta = 0, \quad \sin \theta = 1$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \quad \text{or} \quad \theta = \frac{-\pi}{2}$$

وحيث أن $\frac{-\pi}{2}$ أقل عدداً من $\frac{3\pi}{2}$

$$\therefore -6i = 6 \left[\cos \left(\frac{-\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{2} \right) \right].$$

نظرية ديموافر

إذا كان $Z = \cos \theta + i \sin \theta$, $n \in \mathbb{Q}$ فإن

$$Z^n = (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

نفرض عددين مركبين فى الصورة المثلثية :

$$Z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1),$$

$$Z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2).$$

$$\begin{aligned} Z_1 Z_2 &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i (\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)] \end{aligned}$$

$$\therefore Z_1 Z_2 = [r_1 r_2 (\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2))]$$

$$|Z_1 Z_2| = r_1 r_2$$

من هذا نرى أن

$$\text{Arg} (Z_1 Z_2) = \theta_1 + \theta_2$$

معنى ذلك أن القيمة العددية لحاصل ضرب عددين مركبين هى حاصل ضرب القيم العددية لكل من العددين بينما سعة حاصل الضرب يساوى مجموع سعتى العددين .

وإذا كان لدينا n من الأعداد المركبة فإنه بتطبيق نفس الأسلوب نحصل على

$$(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \dots (\cos \theta_n + i \sin \theta_n) \\ = \cos (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta \quad \text{فى حالة}$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad \text{فإن}$$

وهذه هى نظرية ديموافر .

ويمكن بسهولة إثبات هذه النظرية فى حالة ما تكون n عدد صحيح سالب لأن

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{-1} = \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)} = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\therefore (\cos \theta + i \sin \theta)^{-1} = \cos (-\theta) + i \sin (-\theta)$$

أى أن نظرية ديموافر صحيحة أيضاً عند $n = -1$ وبرفع طرفى المعادلة السابقة إلى الأس n نحصل على

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{-n} = [\cos (-\theta) + i \sin (-\theta)]^n \\ = \cos (-n \theta) + i \sin (-n \theta)$$

بهذا نستطيع أن نوجد خارج قسمة عددين مركبين :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)}{r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)} \\ = \frac{r_1}{r_2} (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)^{-1}$$

وبتطبيق نظرية ديموافر نحصل على :

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\theta_1 - \theta_2) + i \sin (\theta_1 - \theta_2)]$$

وبذلك يكون:

$$, \operatorname{Arg} \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right) = \theta_1 - \theta_2 \quad \left| \frac{Z_1}{Z_2} \right| = \frac{r_1}{r_2}$$

مثال (٤): ضع الأعداد المركبة الآتية في صورتها المثلثية:

$$(\sqrt{3} + i)^3, \quad \frac{(1+i)^4}{(1-i)^5}$$

الحل

نفرض أن

$$+ i = r (\cos \theta + i \sin \theta) \sqrt{3}$$

$$\therefore r = 2, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$(\sqrt{3} + i)^3 = 8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

أيضاً نضع :

$$1 + i = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$1 - i = \sqrt{2} \left[\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) \right]$$

$$\therefore \frac{(1+i)^4}{(1-i)^5} = \frac{(\sqrt{2})^4}{(\sqrt{2})^5} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]^4 \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right]^5$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\cos \pi + i \sin \pi \right] \left[\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

تطبيقات على نظرية ديموافر

أولاً :- مفكوك $\cos n\theta, \sin n\theta$ حيث n عدد صحيح موجب .

من نظرية ديموافر نعلم أن :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

ومن نظرية ذات الحدين نعلم أن :

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^n &= \cos^n \theta + {}^nC_1 \cos^{n-1} \theta (i \sin \theta) \\ &+ {}^nC_2 \cos^{n-2} \theta \cdot (i \sin \theta)^2 + \dots + \sin^n \theta \\ &= \cos n\theta + i \sin n\theta \end{aligned}$$

وبمساواة الأجزاء الحقيقية في الطرفين نحصل على :

$$\cos n\theta = \cos^n \theta - {}^nC_2 \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \dots$$

$$\sin n\theta = {}^nC_1 \cos^{n-1} \theta \sin \theta - {}^nC_3 \cos^{n-3} \theta \sin^3 \theta + \dots$$

مثال (٥): أوجد $\sin 5\theta, \cos 5\theta$ بدلالة $\sin \theta, \cos \theta$.

الحل

$$\begin{aligned} \cos 5\theta + i \sin 5\theta &= \cos^5 \theta + 5 (\cos^4 \theta) (i \sin \theta) \\ &+ 10 (\cos^3 \theta) (i \sin \theta)^2 + 10 (\cos^2 \theta) (i \sin \theta)^3 \\ &+ 5 \cos \theta (i \sin \theta)^4 + (i \sin \theta)^5 \end{aligned}$$

$$\cos 5\theta = \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta.$$

$$\sin 5\theta = 5 \cos^4 \theta \sin \theta - 10 \cos^2 \theta \sin^3 \theta + \sin^5 \theta$$

وأيضاً يمكن استنتاج :

$$\tan 5\theta = \frac{\sin 5\theta}{\cos 5\theta} = \frac{5 \tan \theta - 10 \tan^3 \theta + \tan^5 \theta}{1 - 10 \tan^2 \theta + 5 \tan^4 \theta}$$

ثانياً : مفكوك $\sin^n \theta$, $\cos^n \theta$ بدلالة مكررات (مضاعفات) الزوايه θ .

نفرض العدد المركب $Z = \cos \theta + i \sin \theta$

$$\therefore \frac{1}{Z} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

$$\therefore Z + \frac{1}{Z} = 2 \cos \theta, \quad Z - \frac{1}{Z} = 2 i \sin \theta$$

أيضاً نعلم أن :

$$Z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta, \quad \frac{1}{Z^n} = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

$$\therefore (Z^n + \frac{1}{Z^n}) = 2 \cos n\theta, \quad (Z^n - \frac{1}{Z^n}) = 2 i \sin n\theta$$

$$\therefore \left(Z + \frac{1}{Z} \right)^n = 2^n \cdot \cos^n \theta$$

$$= Z^n + {}^nC_1 Z^{n-2} + {}^nC_2 Z^{n-3} + \dots + \frac{1}{Z^n}$$

أى أن :

$$2^n \cos^n \theta = (Z^n + \frac{1}{Z^n}) + {}^nC_1 (Z^{n-2} + \frac{1}{Z^{n-2}}) + \dots$$

وبتطبيق العلاقة السابقة نحصل على :

$$2^n \cos^n \theta = 2 \cos n\theta + n \cdot 2 \cos (n-2) \theta +$$

$$\frac{n(n-1)}{2!} 2 \cos (n-4) \theta + \dots$$

$$(2i \sin \theta)^n = \left(Z - \frac{1}{Z}\right)^n \quad \text{ولإيجاد مفكوك } \sin^n \theta \text{ نعتبر :}$$

ثم يتبع نفس الخطوات السابقة

مثال (٦): أوجد مفكوك $\tan^4 \theta$

الحل

$$\tan^4 \theta = \frac{\sin^4 \theta}{\cos^4 \theta}$$

$$(2 \cos \theta)^4 = \left(Z + \frac{1}{Z}\right)^4$$

$$= Z^4 + 4 Z^2 + 6 + 4 \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{Z^4}$$

$$= \left(Z^4 + \frac{1}{Z^4}\right) + 4 \left(Z^2 + \frac{1}{Z^2}\right) + 6$$

$$\therefore 2^4 \cos^4 \theta = 2 \cos 4\theta + 8 \cos 2\theta + 6$$

$$2^4 \sin^4 \theta = 2 \cos 4\theta - 8 \cos 2\theta + 6 \quad \text{بالمثل نجد أن}$$

$$\therefore \tan^4 \theta = \frac{\cos 4\theta - 4 \cos 2\theta + 3}{\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3}$$

ثالثاً : - إيجاد جذور المعادلة $x^n = Z$ حيث Z عدد مركب .

$$(1) Z = r (\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{لحل هذه المعادلة نضع :}$$

$$(2) x = r_1 (\cos \phi + i \sin \phi) \quad \text{ونفرض أن الجذر}$$

وبالتعويض في المعادلة $x^n = Z$ نحصل على

$$r_1^n (\cos \phi + i \sin n \phi) = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

∴ ومن التساوي نحصل على $r_1^n = r \Rightarrow r_1 = r^{\frac{1}{n}}$

$$\cos n \phi + i \sin \phi = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\therefore \cos n \phi = \cos \theta, \quad \sin n \phi = \sin \theta$$

من ذلك نستنتج أن : $n \phi = \theta + 2 \pi k, K = 0, 1, 2, \dots$

جذور المعادلة $X^n = Z$ نحصل عليها بالتعويض عن r_1, ϕ في (2)

$$\therefore x = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2 \pi k}{n} + i \sin \frac{\theta + 2 \pi k}{n} \right]$$

وحيث أن المعادلة $X^n = Z$ لابد أن يكون لها n من الجذور المختلفة : وهذا يحدث إذا كانت $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

ملحوظة : حينما نوجد جذور المعادلة $x^n = Z$ فكأننا نوجد قيمة $Z^{\frac{1}{r}}$ أى الجذر النونى للعدد المركب $Z = r (\cos \theta + i \sin \theta)$ معنى ذلك أن الجذر النونى لأى عدد مركب يكون له n من القيم هى :

$$r^{\frac{1}{n}} \left[\cos \frac{\theta + 2 \pi k}{n} + i \sin \frac{\theta + 2 \pi k}{n} \right], k = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

مثال (٧) : حل المعادلة $X^4 = 16$

الحل

$$16 = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\therefore r = 16, \cos \theta = 1, \sin \theta = 0, \theta = 0$$

$$x^4 = 16 (\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{نفرض}$$

$$x = (16)^{\frac{1}{4}} \left[\left(\frac{0 + 2 k \pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{0 + 2 k \pi}{4} \right) \right]$$

$$x = 2 \left(\cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2} \right), k = 0, 1, 2, 3.$$

$$\text{at } k = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{at } k = 1 \Rightarrow x = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i$$

$$\text{at } k = 2 \Rightarrow x = 2 \left(\cos \pi + i \sin \pi \right) = 2$$

$$\text{at } k = 3 \Rightarrow x = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -2i$$

ملحوظة: إذا مثلت هذه الجذور في مستوى أركانها تقع على محيط دائرة واحدة وتقسمه إلى أربعة أجزاء متساوية .

مثال (٨): أوجد قيمة $(-i)^4$

الحل

$$i = 1 \left(\cos \theta + i \sin \theta \right)$$

$$r = 1, \cos \theta = 0, \sin \theta = -1 \quad \therefore \theta = \frac{-\pi}{2}$$

$$\therefore -i = \cos \left(\frac{-\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{2} \right)$$

قيمة المعادلة

$$x = \cos \left(\frac{-\pi + 2k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi + 2k\pi}{2} \right), k = 0, 1, 2, 3$$

$$\text{at } k = 0 \Rightarrow x = \cos \left(\frac{-\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{-\pi}{2} \right) ;$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) ;$$

$$k = 2 \Rightarrow x = \cos\left(\frac{4\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{8}\right);$$

$$k = 3 \Rightarrow x = \cos\left(\frac{11\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{8}\right).$$

نمارين

[١] أوجد $|Z|$, $\bar{Z}$, $\arg(Z)$ لكل من $Z = 1 - i\sqrt{3}$, $Z = -2 - 3i$, $Z = i$

[٢] إذا كانت $Z = 1 + i$ فعين $\frac{1}{Z}$, Z^2 , Z^3

[٣] أوجد عددين حقيقيين a , b بحيث يكون

$$(1 + i)a + 2(1 - 2i)b - 3 = 0$$

[٤] عبر عن كل مما يأتي $\sin 4\theta$, $\sin 5\theta$, $\sin 9\theta$ بدلالة قوى $\sin \theta$

[٥] برهن أن $\left|\frac{1-Z}{\bar{Z}-1}\right| = 1$ حيث $Z \neq 1$

[٦] أثبت أن $\sin^3 \theta = \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin 3\theta$

$$\cos^4 \theta = \frac{1}{8} \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}$$

[٧] أوجد جذور المعادلة $Z^5 = 1$, $Z^8 + 1 = 0$

[٨] استخدام نظرية دي موافر أثبت أن

[٩] $\cos 5\theta = \cos^5 \theta - 10 \cos^3 \theta \sin^2 \theta + 5 \cos \theta \sin^4 \theta$

وأوجد كذلك $\sin 5\theta$ وعبر عن $\tan 5\theta$ بدلالة $\tan \theta$

$$\frac{1 + \sin \theta + i \cos \theta}{1 + \sin \theta - i \cos \theta} = \sin \theta + i \cos \theta: \text{أثبت أن [١٠]}$$

[١١] عبر عن الأعداد المركبة الآتية فى الصورة المثلثية

$$Z = -\sqrt{3} + i, Z = 1 + i, Z = -1 + i\sqrt{3}$$

[١٢] أوجد الجذور الأربعة للعدد المركب $Z = -2 - \sqrt{3} i$

[١٣] أوجد $\left(\frac{a+ib}{a-ib}\right)^2 - \left(\frac{a-ib}{a+ib}\right)^2$

[٤] إذا كانت $Z = x + iy$ أوجد x, y عندما $\frac{2z}{1+i} - \frac{2z}{i} = \frac{5}{2+i}$

١٥] إذا كانت $Z_1 = 2 + i$, $Z_2 = -2 + 4i$ وكانت $Z_3^{-1} = Z_1^{-1} + Z_2^{-1}$

Z₃. أوجد



الباب الرابع

نظرية المعادلات

فى هذا سنتعرض لبعض النظريات الهامة الخاصة بالمعادلات وحلولها وقد سبق أن درس الطالب فى المرحلة السابقة معادلة الدرجة الثانية وصورتها العامة هى $ax^2 + bx + c = 0$ وكان جذر المعادلة يعطيان بالعلاقتين.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

والآن سنناقش المعادلات التى من درجة n فى مجهول واحد والتى على الصورة

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (1)$$

حيث $a_0, a_1, \dots, a_n$ أعداد حقيقية.

وهنا ينشأ سؤال هام هو هل يمكن الحصول على قانون عام نستخدمه كما هو الحال فى حالة معادلة الدرجة الثانية لاستخراج حلول هذه المعادلة ؟

مثل هذا القانون موجود للمعادلات التى من الدرجة الثالثة والرابعة فقط إلا أن استخدامهم معقد وللمعادلات من الدرجة الأعلى من الدرجة الرابعة لا يوجد مثل هذا القانون (وقد أثبت آبل *Abel* أن مثل ذلك القانون لا يمكن إيجاده) وبالطبع فإن هذا لا يعنى أن المعادلة ليس لها جذور . فوجود القانون لإيجاد الجذور شىء ووجود الجذر نفسه شىء آخر . وسوف نورد فيما يلى نظرية هامة جداً .

نظرية (١): كل معادلة جبرية من درجة n (حيث n عدد صحيح موجب)

على الصورة (١) لها على الأقل جذر واحد فى مجال الأعداد المركبة (من الممكن أن يكون هذا الجذر حقيقى أو مركب).

ومن هذه النظرية تنتج النتيجة الآتية:

نتيجة: للمعادلة الجبرية التى من درجة n جذور (حقيقة أو مركبة) عددها n .

نظرية (٢): إذا كانت معاملات المعادلة (١) كلها حقيقية وكان هناك جذر

مركب لهذه المعادلة على الصورة $\alpha + i\beta$ فإن مرافق هذا الجذر $\alpha - i\beta$ يكون أيضاً جذر لهذه المعادلة .

نتيجة (١): عدد الجذور المركبة لأى معادلة جبرية يكون عدداً زوجياً (معاملات المعادلة حقيقية).

نتيجة (٢): المعادلة الجبرية ذات المعاملات الحقيقية والتى من درجة $(2n + 1)$ فردية لها على الأقل جذر حقيقى واحد.

نظرية (٣) إذا كانت معاملات المعادلة (١) كلها أعداد قياسية (أى على الصورة $\frac{p}{q}$ حيث p, q أعداد صحيحة).

فمثلاً: إذا كانت $\alpha + \sqrt[n]{\beta}$ جذر للمعادلة فإن للمعادلة جذر آخر على الصورة $\alpha - \sqrt[n]{\beta}$ حيث $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$

العلاقة بين جذور المعادلة ومعاملاتها:

والآن لتكن $P_1, P_2, \dots, P_n$ هي جذور المعادلة (١) فإن $P(x)$ يمكن كتابتها على الصورة $(x-p)(x-p_2)\dots(x-p_1)a_0$ ومن ثم نستطيع بمقارنة المعاملات أن نستنتج أن:

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = \frac{-a_1}{a_0} = \frac{\text{معامل } x^{n-1}}{\text{معامل } x^n}$$

$$P_1(P_2+P_3+\dots+P_n) + P_2(P_3+P_4+\dots+P_n) + \dots + P_{n-1}P_n = \frac{a_2}{a_0} = \frac{\text{معامل } x^{n-2}}{\text{معامل } x^n}$$

$$\frac{-a_1}{a_0} = \frac{\text{معامل } x^{n-1}}{\text{معامل } x^n} = \text{أى أن مجموع الجذور}$$

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{\text{معامل } x^{n-2}}{\text{معامل } x^n} = \text{مجموع حاصل ضرب الجذور مأخوذة مثنى}$$

$$\frac{a_3}{a_0} = \frac{\text{معامل } x^{n-3}}{\text{معامل } x^n} = - \text{مجموع حواصل ضرب الجذور مأخوذة ثلاث}$$

مجموع حواصل ضرب الجذور مأخوذة m

$$(-1)^m \frac{a_m}{a_0} = \frac{\text{معامل } x^{n-m}}{\text{معامل } x^n} =$$

$$(-1)^n \frac{a_n}{a_0} = \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل } x^n} = \text{حاصل ضرب الجذور كلهم}$$

وقد يتبادر إلى الذهن أنه بمعرفة هذه العلاقات يمكننا حل المعادلة المعطاة ولكن فى واقع الأمر فإن أى محاولة للحذف لكى نوجد قيم الجذور ستبوء بالفشل فستنتج المعادلة المراد حلها . ولكن نحذر من عمل ذلك لعدم ضياع الوقت .

مثال (١): إذا كانت جذور المعادلة $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ تكون متوالية عددية فأوجد الجذور.

الحل

نفرض أن الجذور هي $a - b, a, a + b$ واضح أن مجموع الجذور هو $3a$

$$\therefore 3a = \frac{-(-6)}{1} = 6 \Rightarrow a = 2$$

مجموع الجذور مثنى مثنى = $\frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } x^3}$

$$(a - b)(a + a + b) + a(a + b) = \frac{11}{1} = 11$$

$$3a^2 - b^2 = 11$$

ومنها

بالتعويض عن قيمة $a = 2$ نحصل على

$$12 - b^2 = 11 \Rightarrow b^2 = 1 \therefore b = \pm 1$$

وأى من القيمتين يصلح وتكون الجذور هي $1, 2, 3$

$$x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48 = 0 \quad \text{مثال (٢): حل المعادلة}$$

إذا كان مجموع جذرين من جذورها صفراً .

الحل

نفرض أن الجذور هي a, b, c, d

$$a + b = 0 \Rightarrow a = -b \quad \text{بحيث تحقق}$$

ومن ثم تكون الجذور هي $a, -a, c, d$

$$\frac{x^3 \text{ معامل}}{x^4 \text{ معامل}} - = \text{مجموع الجذور}$$

$$c + d = -1$$

$$\frac{x^2 \text{ معامل}}{x^4 \text{ معامل}} - = \text{مجموع الجذور مثنى مثنى}$$

$$-a^2 + ac + ad - ac - ad + cd = -16$$

$$-a^2 + cd = -16 \quad (2)$$

$$\frac{x \text{ معامل}}{x^4 \text{ معامل}} - = \text{مجموع حاصل ضرب الجذور ثلاث}$$

$$a^2 c - a^2 d + a c d - a c d = 4$$

$$\therefore -a^2 (c + d) = 4 \quad (3)$$

$$\frac{\text{الحاصل المطلق}}{x^4 \text{ معامل}} = \text{حاصل ضرب الجذور كلها}$$

$$-a^2 cd = 48 \quad (4)$$

$$a = \pm 2 \quad \text{من (١) ، (٣) ينتج أن } a^2 = 4 \text{ ومن ثم ينتج أن}$$

وحيث أننا استنتجنا أنه إذا كان a جذر فإن $-a$ جذراً أيضاً. فيكون

$$-2, 2 \text{ جذران ومن (2) ينتج أن:}$$

$$cd = -12, \quad c + d = -1 \quad \therefore c = -d - 1$$

$$-(d + 1)d = -12, \quad d^2 + d - 12 = 0$$

$$\therefore (d - 3)(d + 4) = 0$$

ومن ثم إذا كان $d = 3$ فإن $c = -4$ وإذا كان $d = -4$ فإن $c = 3$ وعليه

تكون جذور المعادلة هي $2, -2, 3, -4$

مثال (٣): أوجد جذور المعادلة $x^4 - 7x^3 + 19x^2 - 23x + 10 = 0$

إذا علم أن أحد جذورها هي $2 + i$

الحل

حيث أن المعاملات كلها حقيقية فمن نظرية (2) يكون $2 - i$ جذراً لهذه المعادلة ومن ثم تكون معادلة الدرجة الثانية التي جذرها $2 \pm i$ هي $x^2 - 4x + 5 = 0$ ومن ثم نجد أن المعادلة المعطاة يمكن كتابتها على الصورة

$$(x^2 - 4x + 5) (x^2 + ax + b) = 0$$

وبمقارنة المعاملات نجد أن $b = 2$

$$5a - 4b = -23 \Rightarrow 5a = -15 \Rightarrow a = -3$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0$$

ومن ثم تكون جذور المعادلة هي: $1, 2, 2 + i, 2 - i$

نعلم أنه إذا كانت $P_1, P_2, \dots, P_n$ هي جذور المعادلة $P_n(x) = 0$ فإننا نستطيع كتابتها على الصورة

$$P(x) = a_0 (x - P_1) (x - P_2) \dots (x - P_n) = 0$$

وإذا كان للمعادلة $P_n(x) = 0$ جذر $x = p$ مكرر m مرة فقط فإننا نستطيع كتابة المعادلة على الصورة

$$P(x) = (x - p)^m g(x)$$

حيث $g(x)$ هي كثيرة حدود من الدرجة $(n-m)$ ويكون $g(p) \neq 0$ بإجراء التفاضل نجد أن

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= m(x - p)^{m-1} g(x) + (x - p)^m g'(x) \\ &= (x - p)^{m-1} [mg(x) + (x - p) g'(x)] \end{aligned}$$

ومن ثم نجد أن المعادلة $P'_n(x) = 0$ لها جذر $x = p$ مكرر $m - 1$ مرة فقط وذلك لأن $g(p) = 0$ وبالمثل نجد أن $P''_n(x) = 0$ لها جذر $x = p$ مكرر $m-2$ مرة فقط وهكذا فإن $P^{(r)}_n(x) = 0$ جذر $x = p$ مكرر $m-r$ مرة فقط

مثال (٤): أوجد حل المعادلة

$$x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24 = 0$$

إذا علمت أن لها جذر مكرر ثلاث مرات.

الحل

$$P(x) = x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24$$

$$P'(x) = 4x^3 - 27x^2 + 60x - 44.$$

$$P''(x) = 12x^2 - 54x + 60$$

$$= 6(2x^2 - 9x + 10)$$

$$= 6(2x - 5)(x - 2)$$

نجد أن جذور $P''(x) = 0$ هي $x = 5/2$, $x = 2$

نعوض عن هاتين القيمتين في كل من $P(x) = 0$ و $P'_n(x) = 0$ والذي يحقق كلاهما معاً فهو الجذر المكرر . نجد أن $x = 2$ هو جذر مكرر ثلاث مرات و من ثم نجد أن

$$P(x) = (x - 2)^3(x - a)$$

ويمكن تعيين الجذر a من مقارنة المعاملات نجد أن حاصل ضرب الجذور

$$\text{هو } 8a \text{ ومن المعادلة نجد أنه } 24 \text{ ومن ثم } a = 3$$

$$\therefore P(x) = (x-2)^3(x-3)$$

2 , 2 , 2 , 3

الجذور هي

المعادلات ثنائية التربيع

المعادلات التي على الصورة $ax^4 + bx^2 + c = 0$ تسمى ثنائية التربيع

ولحل هذا النوع نضع $Z = x^2$ ومن ثم نجد أن:

$$aZ^2 + bZ + c = 0$$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في Z ومن ثم نجد أن

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x_{3,4} = \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

مثال (٥): حل المعادلة $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

الحل

نضع $Z = x^2$ ومن ثم نجد أن

$$Z^2 - 13Z + 36 = 0 \quad \therefore (Z - 9)(Z - 4) = 0$$

$$\text{i.e, } Z = 9, \quad Z = 4$$

$$\therefore x = \pm 3, \quad x = \pm 2$$

2 , -2 , 3 , -3

جذور هذه المعادلة هي

المعادلات التي تحتوى ثلاث حدود والتي على الصورة

$$ax^{2m} + bx^m + c = 0$$

نضع $Z = x^m$ نجد أن $aZ^2 + bZ + c = 0$ وهذه معادلة من الدرجة

الثانية في Z نوجد حلها وليكن p, q ومن ثم نوجد حل المعادلتين $x^m - q$

$$x^m - p = 0, \quad x^m - p = \theta$$

مثال (٨): أوجد حل المعادلة $x^6 - 5x^3 + 6 = 0$

الحل

$$Z = x^3$$

$$Z^2 - 5Z + 6 = 0$$

$$(Z - 2)(Z - 3) = 0$$

$$\therefore x^3 = 2 \quad , \quad x^3 = 3$$

$$\therefore x = \sqrt[3]{2} \quad , \quad x = \sqrt[3]{3}$$

ومن باب الأعداد المركبة

$$x_1 = \sqrt[3]{2} \quad , \quad x_2 = \sqrt[3]{2} w \quad , \quad x_3 = \sqrt[3]{2} w^2$$

$$x_4 = \sqrt[3]{3} \quad , \quad x_5 = \sqrt[3]{3} w \quad , \quad x_6 = \sqrt[3]{3} w^2$$

$$w = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad , \quad w^2 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{حيث}$$

معادلات الدرجة الثالثة (طريقة كاردان)

تستخدم طريقة كاردان لحل معادلات الدرجة الثالثة والتي على الصورة

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{بقسمة جميع حدود المعادلة أولاً على } a$$

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

$$x = y - \frac{a_1}{3} \quad \text{نحذف معامل } x^2 \text{ باستخدام التعويض الآتي:}$$

$$y^3 + py + q = 0 \quad (1) \quad \text{نحصل على}$$

$$y_1, y_2, y_3 \quad \text{وإذا كانت جذور (1) هي}$$

فإن جذور المعادلة المعطاة هي

$$x_1 = y_1 - \frac{a_1}{3} \quad , \quad x_2 = y_2 - \frac{a_1}{3} \quad , \quad x_3 = y_3 - \frac{a_1}{3}$$

$$y = z - \frac{p}{3z} \quad (2) \quad \text{ولحل المعادلة (1) نضع}$$

وتختزل المعادلة إلى الصورة $Z^3 - \frac{p^3}{27Z^3} + q = 0$

وبالضرب في Z^3 نحصل على $Z^6 + qZ^3 - \frac{p^3}{27} = 0$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في Z^3

$$Z^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{R}$$

حاصل ضرب الجذرين يساوي $\frac{p}{3}$ فيفرض أن الجذور لـ (2) هي Z_1, Z_2

$$Z_1 = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{R}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad Z_2 = \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{R}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (3)$$

بفرض أن الجذور (3) هي wa, w^2a و b, wb, w^2b

حيث $w, w^2, 1$ هي الجذور التكعيبية للواحد الصحيح من هذه الجذور الستة نختار الجذور بحيث يكون حاصل ضرب أي اثنين منهم يساوي $\frac{-P}{3}$ أي

$$ab, wa \cdot w^2b, w^2a \cdot wb$$

أنهم عند ذلك تكون جذور المعادلة (١) هي

$$y_1 = a + b, \quad y_2 = aw + bw^2, \quad y_3 = w^2a + wb$$

وتسمى هذه صورة كاردان لجذور المعادلة (١)

وبالتالي يمكن استنتاج جذور المعادلة المعطاة

مثال (٩) أوجد جذور المعادلة $x^3 - 18x - 35 = 0$

الحل

نضع $x = Z + \frac{18}{37}$ و منها $Z^3 + \frac{216}{Z^3} - 35 = 0$

$$\therefore Z^6 - 35 Z^3 + 216 = 0$$

$$Z^3 = \frac{35 \pm \sqrt{361}}{2}$$

$$Z^3 = 27, \quad Z^3 = 8$$

وبالتالى جذور المعادلة هي $3w^2 + 2w$, $3w + 2w^2$, $3 + 2$

ولكن $w = \frac{-1 + \sqrt{3} i}{2}$, $w^2 = \frac{-1 - \sqrt{3} i}{2}$

إذن الجذور هي 5 , $\frac{-5 - \sqrt{3} i}{2}$, $\frac{-5 + \sqrt{3} i}{2}$

تمارين

١. حل المعادلة $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5 = 0$ إذا علم أن أحد جذور المعادلة هو i .

٢. أوجد جذور المعادلة $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$ إذا علم أن جذورها تكون متوالية عددية.

٣. أوجد الشرط اللازم لكي يكون جذران من جذور المعادلة

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

٤. حل المعادلة $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = 0$ إذا علم أن لها زوجان من الجذور المتساوية.

٥. استخدم طريقة كاردان لحل المعادلة

(i) $x^3 + 6x^2 - 12x + 32 = 0$

(ii) $x^3 - 6x - 9 = 0$

(ii) $9x^3 + 9x^2 - 1 = 0$

٦. حل المعادلة $x^3 - 21x^2 + 126x - 216 = 0$ إذا علمت أن

جذورها في متوالية هندسية .

XXXXXXXXXXXX

الكسور الجزئية

تعرف الكسور على أنها خارج قسمة كثيرتى حدود ويسمى الكسر بالكسر الفعلى إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام ويسمى الكسر بالكسر الغير فعلى إذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوى درجة المقام ويمكن تحويل الكسر الغير فعلى إلى كسر فعلى بالإضافة إلى كثيرة حدود وذلك بإجراء عملية القسمة ومثال لذلك .

$$\frac{2x^5}{(x^2-1)(x^2-4)} = 2x + \frac{10x^3-8x}{(x^2-1)(x^2-4)}$$

والموضوع الذى سوف نتناوله إنشاء الله هو تحليل الكسر الفعلى أو الغير فعلى إلى كسوره الجزئية ويشترط قبل البدء فى عملية التحليل لأى كسر إلى كسوره الجزئية أن تكون درجة البسط أقل من درجة المقام فإذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوى درجة المقام فأننا نقوم بإجراء عملية القسمة العادية لتحويل الكسر الغير فعلى إلى كسر فعلى مضاف إليه كثيرة حدود وذلك كما فى المثال السابق ثم نقوم بتحليل الكسر الفعلى الناتج إلى كسوره الجزئية وسوف نعتبر الآن أربعة حالات تبعاً للقيم الناتجة من تحليل المقام .

الحالة الأولى "جميع عوامل المقام من الدرجة الأولى حقيقة ومختلفة"

نفرض أن الكسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ حيث المقام كثيرة حدود من الدرجة n والتى يمكن تحليلها إلى n من العوامل الأولية الحقيقة المختلفة من الدرجة الأولى على الصورة.

$$g(x) = (x-x_1) (x-x_2) \dots (x-x_n)$$

وبالتالى يمكن كتابة الكسر على الصورة

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}$$

ويمكن كتابة هذا الكسر على صورة مجموع كسور فعلية أى

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_2)} + \dots + \frac{A_n}{(x-x_n)}$$

ويمكن تعيين الثوابت $A_1, A_2, \dots, A_n$ بتوحيد المقام فى الطرف الأيمن ومساواة البسطين نحصل على .

$$\begin{aligned} f(x) &= A_1(x-x_2)(x-x_3)\dots(x-x_n) \\ &+ A_2(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n) \\ &+ \dots \\ &+ A_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1}). \end{aligned}$$

وبمساواة قوى x المختلفة فى الطرفين نحصل على n من المعادلات والتى بحلها نحصل على الثوابت $A_1, A_2, \dots, A_n$ ويمكن الحصول على هذه القيم بطريقة أخرى وذلك بوضع $x = x_i$ فى المتطابقة السابقة نحصل على .

$$f(x_i) = A_i(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n).$$

وعلى ذلك فإن

$$A_i = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

حيث

مثال (١) حل الكسر الآتى إلى كسوره الجزئية

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)}$$

الحل

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)} = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(3x-2)}$$

وبضرب الطرفين فى المقام المشترك نحصل على

$$5x + 2 = A_1 (3x - 2) + A_2 (x + 2)$$

وبمساواة قوى x المختلفة فى الطرفين نحصل على

$$5 = 3A_1 + A_2, \quad 2 = -2A_1 + 2A_2$$

وبحل هاتان المعادلتان نحصل على
2

ويمكن الحصول على هذه النتيجة وذلك بوضع $x = \frac{2}{3}$ مره للحصول على A_2 ووضع $x = -2$ مره أخرى للحصول على A_1 .

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)} = \frac{1}{(x+2)} + \frac{2}{(3x-2)}$$

ويكون الكسر هو

الحالة الثانية " بعض عوامل المقام من الدرجة الأولى ولكنه مكرره " .

مثال لذلك $\frac{x^2+x+2}{(x-1)^3(x-2)}$ فى هذه الحالة نضع العامل المكرر وهو $y = x-1$

ثم نحول الكسر من داله فى x إلى داله فى y ينتج أن

$$\frac{x^2+x+2}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{4+3y+y^2}{y^3(y-1)}$$

وبقسمة البسط $4 + 3y + y^2$ على $(y-1)$ ونستمر فى القسمة حتى نحصل على باقى يحتوى على y مرفوعة لأس يساوى درجه المعامل المكرر وهو 3 فى هذا المثال نجد أن

$$\frac{4+3y+y^2}{y^3(y-1)} = \frac{1}{y^3} [-4-7y-8y^2 + \frac{8y^3}{y-1}]$$

$$= \frac{-4}{y^3} - \frac{7}{y^2} - \frac{8}{y} + \frac{8}{y-1}$$

بإرجاع قيم x مره أخرى نجد أن الكسر يساوى

$$\frac{-4}{(x-1)^3} - \frac{7}{(x-1)^2} - \frac{8}{(x-1)} + \frac{8}{(x-2)}$$

ونلاحظ أن العامل المكرر $(x-1)^3$ فى المقام يناظره كسور جزئية على الصورة .

$$\frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)}$$

وبوجه عام فإن لدينا القاعدة الآتية .

كل عامل فى المقام على الصورة $(x-A)^r$ يقابله r من الكسور الجزئية على

$$\frac{A_1}{(x-A)^r} + \frac{A_2}{(x-A)^{r-1}} + \dots + \frac{A_r}{(x-A)} \quad \text{الصورة}$$

مثال (٢) حل الكسر $\frac{2x^2+6x-4}{x(x+2)^2}$ إلى كسوره الجزئية .

الحل

$$\frac{2x^2+6x-4}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)} \quad \text{بوضع الكسر على الصورة}$$

وبتوحيد المقام للطرف الأيمن نحصل على

$$2x^2 + 6x - 4 = A(x+2)^2 + Bx + C(x+2)$$

$$B = 4 \quad \text{ينتج أن} \quad x = -2 \quad \text{وبوضع}$$

$$A = -1 \quad \text{ينتج أن} \quad x = 0 \quad \text{وبوضع}$$

ولإيجاد قيمة C نضع أى قيمه إختياريه لـ x فمثلاً بوضع $x=1$ نجد أن

$$4 = 9A + B + 3C$$

ومنها $C = 3$ وعلى ذلك يكون $\frac{2x^2+6x-4}{x(x+2)^2} = \frac{-1}{x} + \frac{4}{(x+2)^2} + \frac{3}{(x+2)}$

الحالة الثالثة : "المقام يحتوى على عوامل من الدرجة الثانية لا يمكن تحليلها إلى عوامل حقيقية "

فى هذه الحالة يمكن تحليل العامل إلى عاملين تخيليين فمثلاً المقدار

$$(x-a)^2 + b^2 \text{ يمكن تحليله إلى عاملين تخيليين على الصورة } (x-a) - ib$$

$$(x-a) + ib \text{ حيث } i = \sqrt{-1} \text{ أى يمكن أن يناظره كسران جزئيان على}$$

$$\frac{A}{(x-a)+ib} + \frac{B}{(x-a)-ib} \quad \text{الصورة}$$

وبتوحيد الكسرين نحصل على كسر واحد هو $\frac{Cx+D}{(x-a)^2+b^2}$ أى أن كل

عامل من الدرجة الثانية لا يمكن تحليله إلى عوامل حقيقية من الدرجة الأولى فإننا نفرض له كسر بسطه من الدرجة الأولى ومقامه نفس المقام

مثال (٣) حلل الكسر الآتى إلى كسوره الجزئية

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+x-4)}$$

الحل

نضع الكسر على الصورة

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+x-4)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+x-4)}$$



بضرب الطرفين فى المقدار $(x-1)(x^2+x-4)$

$$2 = A(x^2 + x - 4) + (Bx + C)(x-1) \quad \text{نحصل على}$$

بمساواة قوى x فى الطرفين نجد أن

$$A + B = 0 \quad \text{معامل } x^2 \text{ يعطى}$$

$$A - B + C = 0 \quad \text{ومعامل } x \text{ يعطى}$$

$$-4A - C = 2 \quad \text{والحد المطلق يعطى}$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على $A = -1, B = 1, C = 2$

$$= \frac{x+2}{(x^2+x-4)} + \frac{1}{(x-1)} \frac{2}{(x-1)(x^2+x-4)} \quad \text{أى أن}$$

الحالة الرابعة .

"المقام يحتوى على عوامل مكرره من الدرجة الثانية لا تتحلل إلى عوامل حقيقية من الدرجة الأولى"

فى هذه الحالة إذا أحتوى المقام للكسر المراد إيجاد كسور الجزئية على مقدرا مثل $(ax^2 + bx + c)^r$ فإنه يناظره r من الكسور الجزئية على الصورة.

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^r} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^{r-1}} + \dots + \frac{Hx+k}{(ax^2+bx+c)}$$

مثال (٤) أوجد الكسور الجزئية المناظرة للكسر

$$\frac{x^4 - x^3 + 8x^2 - 6x + 7}{(x-1)(x^2+2)^2}$$

الحل

نضع الكسر على الصورة

$$\frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+2)^2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)}$$

وبضرب الطرفين فى المقدار $(x-1)(x^2+2)^2$

نحصل على

$$\begin{aligned} x^4 - x^3 + 8x^2 - 6x + 7 &= A(x^2+2)^2 + \\ &+ (Bx+C)(x-1) + (Dx+E)(x^2+2)(x-1) \\ &= (A+D)x^4 + 1 - (D+E)x^3 + (4A+B+2D-E)x^2 \\ &+ (-B+C-2D+2E)x + (4A-C-2E) \end{aligned}$$

و الآن لى نحصل على الثوابت A, B, C, D, E نقوم بمساواة المعاملات فى الطرفين نحصل على مجموعة المعادلات

$$1 = A + D$$

بمساواة معامل x^4

$$-1 = -D + E$$

بمساواة معامل x^3

$$8 = 4A + B + 2D - E$$

بمساواة معامل x^2

$$-6 = -B + C - 2D + 2E$$

بمساواة معامل x

$$7 = 4A - C - 2E$$

بمساواة الحد المطلق

وبحل المعادلات الخمس السابقة نحصل على الثوابت المطلوبة ونلاحظ انه
 لسهولة الحل يمكن وضع $X=1$ في المتطابقة السابقة حيث نجد $A=1$
 مباشرة.

وبالتالي فمن المعادلة الأولى نجد إن $D=0$ ، المعادلة الثانية تعطي
 $E=-1$ والمعادلة الثالثة تعطي $B=3$ والمعادلة الرابعة تعطي $C=-1$
 أن أن
$$\frac{x^4 - x^3 + 8x^2 - 6x + 7}{(x-1)(x^2+2)^2} = \frac{1}{(x-1)} + \frac{3x-1}{(x^2+2)^2} + \frac{1}{(x^2+2)}$$

الكسور الجزئية بمجرد النظر

في كثير من الأحوال يمكن إيجاد الكسور الجزئية لكسر معين بمجرد النظر كما
 يتضح من الأمثلة الآتية

مثال (١) أوجد الكسور الجزئية للكسر الآتي $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$

الحل

يمكن وضع الكسر على الصورة
$$\frac{1}{4-1} \left[\frac{1}{(x^2+1)} - \frac{1}{(x^2+4)} \right]$$

أى تكون الكسور الجزئية للكسر هي
$$\frac{1}{3} \frac{1}{(x^2+1)} - \frac{1}{3} \frac{1}{(x^2+4)}$$

مثال (٢) أوجد الكسور الجزئية للكسر
$$\frac{x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

الحل

يمكن وضع الكسر على الصورة $\frac{1}{b^2 - a^2} \left[\frac{x}{x^2 + a^2} - \frac{x}{x^2 + b^2} \right]$
 وتكون الكسور الجزئية للكسر هي $\frac{1}{b^2 - a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + a^2} - \frac{1}{b^2 - a^2} \cdot \frac{x}{x^2 + b^2}$

مثال (٣) أوجد الكسور الجزئية للكسر $\frac{x^2}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)}$

الحل

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} &= \frac{1}{5} \left[\frac{x^2}{(x^2 + 4)} - \frac{x^2}{(x^2 + 9)} \right] \\ &= \frac{1}{5} \left[\frac{x^2 + 4 - 4}{(x^2 + 4)} - \frac{x^2 + 9 - 9}{(x^2 + 9)} \right] = \frac{1}{5} \left[1 - \frac{4}{x^2 + 4} - 1 + \frac{9}{x^2 + 9} \right] \\ &= \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{x^2 + 9} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{x^2 + 4} \end{aligned}$$

وتكون الكسور الجزئية للكسر هي $\frac{9}{5} \cdot \frac{1}{x^2 + 9} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{x^2 + 4}$

مثال (٤) أوجد الكسور الجزئية للكسر $\frac{1}{x(x^2 + 4)}$

الحل

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x^2 + 4)} &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 4} \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{x^2 + 4} \end{aligned}$$

وتكون الكسور الجزئية هي $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{x^2 + 4}$

نمارين

حل كل من الكسور الآتية إلى كسوره الجزئية

$$\frac{2x+2}{(x^2-x-12)}$$

$$\frac{x^2+8}{(x^2-5x+6)}$$

$$\frac{2+x}{1-x^3}$$

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}$$

$$\frac{x^3-x+4}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}$$

$$\frac{x+3}{(x-1)^3(x+1)}$$

بدراسة

الباب السادس

الاستنتاج الرياضى

الاستنتاج الرياضى هو طريقة رياضية قوية فى غاية من الأهمية نستخدمها لإثبات عدد وفير من القوانين والعلاقات الرياضية التى لا يمكن الوصول إليها بطرق مباشرة . وتعتمد طريقه الاستنتاج الرياضى فى مجملها على الخطوات التالية ١- تحقيق من صحة العلاقات أو القانون فى حالات خاصة عندما تكون $n = 1$.

٢-فرض صحة العلاقة أو القانون فى حاله $n = k$.

٣-نثبت صحة العلاقة عند $n = k + 1$.

فإذا كانت العلاقة صحيحة عند $n = 1, 2$ وفرضنا صحة العلاقة عند

$n = k$ وأثبتنا صحة العلاقة عند $n = k + 1$ فإن هذا يعنى أن

العلاقة أو القانون صحيح لجميع قيم n .

وفيما يلى بعض الأمثلة التى توضح ذلك .

مثال (١): باستخدام الاستنتاج الرياضى أثبت أن

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6} (n-1) (2n + 1)$$

الحل

نلاحظ صحة العلاقة عند $n = 1$ حيث نجد أن

$$L . H . S = 1^2 = 1$$

$$R . H . S = \frac{1.2.3}{6} = 1$$

∴ الطرفان متساويان.

العلاقة صحيحة عند $n = 1$ كذلك عند $n = 2$.:

$$L.H.S = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$R.H.S = \frac{2.3.5}{6} = 5$$

العلاقة صحيحة عند $n = 2$ بفرض صحة العلاقة عند $n = k$.:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k}{6} (k+1) (2k+1) \quad (I)$$

(٣) نحاول الآن إثبات صحة العلاقة عند $n = k+1$

$$L.H.S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + K^2 + (k+1)^2$$

و باستخدام العلاقة (I) نجد أن

$$\begin{aligned} L.H.S &= \frac{k}{6} (k+1) (2k+1) + (k+1)^2 \\ &= (k+1) \left[\frac{k}{6} (2k+1) + (k+1) \right] \\ &= \frac{k+1}{6} (2k^2 + 7k + 6) = \frac{k+1}{6} (k+2) (2k+3). \end{aligned}$$

العلاقة صحيحة عند $n = k+1$.:

فهي صحيحة لجميع قيم $n \in N$.:

مثال (٢) : باستخدام الاستنتاج الرياضى أثبت أن المقدار $x^{2n} - y^{2n}$ يقبل

القسمة على $x + y$ لجميع قيم $n \in N$.

الحل

$$= x - y \quad \frac{x^2 - y^2}{x + y} \quad \text{عندما } n = 1$$

∴ العلاقة صحيحة عند $n = 1$

$$= (x - y)(x^2 + y^2) \frac{x^2 - y^2}{x + y} \quad \text{عندما } n = 2$$

∴ العلاقة صحيحة عند $n = 2$

(٢) نفرض أن العلاقة صحيحة عند $n = k$ أى أن $x^{2k} - y^{2k}$ يقبل القسمة على $x + y$ أى أن $x^{2k} - y^{2k} = (x + y) f(x, y)$

حيث $f(x, y)$ داله من الدرجة $2k - 1$

(٣) والآن نحاول إثبات صحة العلاقة عند $n = K + 1$

$$\begin{aligned} x^{2k+2} - y^{2k+2} &= x^{2k+2} - x y^{2k+1} + x y^{2k+1} - y x^{2k+1} + y x^{2k+1} - y^{2k+2} \\ &= x(x^{2k+1} - y^{2k+1}) - x y(x^{2k} - y^{2k}) + y(x^{2k+1} - y^{2k+1}) \\ &= (x + y)(x^{2k+1} - y^{2k+1}) - x y(x^{2k} - y^{2k}) \end{aligned}$$

وفى المقدار الأخير نجد أن الجزء الأول منه عبارة عن مقدار مضروباً فى $(x + y)$ إذأ فهو يقبل القسمة على $x + y$ والجزء الثانى أيضاً يقبل القسمة

على $x + y$ من صحة العلاقة فى (٢) ويمكن كتابه ذلك كما يلى

$$x^{2k+2} - y^{2k+2} = (x + y) G(x, y)$$

حيث $G(x, y)$ داله من الدرجة $2k + 1$ فى x, y

∴ العلاقة صحيحة عند $n = k + 1$ ∴ العلاقة صحيحة لجميع قيم

$$n \in \mathbb{N}$$

مثال (٣): اثبت أن

$$\cos \theta + \cos 3\theta + \dots + \cos (2n - 1)\theta = \frac{\sin 2n\theta}{2 \sin \theta}$$

الحل

كأن المطلوب أن

$$2\cos \theta \sin \theta + 2\sin \theta \cos 3\theta + \dots + 2\sin \theta \cos (2n-1)\theta = \sin 2n\theta$$

عندما $n = 1$

$$L.H.S = 2\sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

$$R.H.S = \sin 2\theta$$

عندما $n = 2$ $\therefore$ العلاقة صحيحة عند $n = 1$

$$L.H.S. = 2\sin \theta \cos \theta + 2\sin \theta \cos 3\theta$$

$$= 2\sin \theta (\cos \theta + \cos 3\theta)$$

$$= 2\sin \theta (2\cos \theta \cos 2\theta) = 2\sin \theta \cos \theta \cdot 2\cos 2\theta$$

$$= 2\sin 2\theta \cos 2\theta = \sin 4\theta$$

$$R.H.S = \sin 4\theta$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة عند $n = 2$

نفرض أن العلاقة صحيحة عند $n = k$ أى أن

$$2\sin \theta [\cos \theta + \cos 3\theta + \dots + \cos (2k-1)\theta] = \sin 2k\theta. \quad (I)$$

نحاول إثبات صحة العلاقة عند $n = k + 1$ نجد أن

$$L.H.S =$$

$$2\sin \theta [\cos \theta + \cos 3\theta + \dots + \cos (2k-1)\theta + \cos (2k+1)\theta]$$

وباستخدام (I)

$$= \sin 2k\theta + 2\sin \theta \cos (2k+1)\theta$$

$$= \sin 2k\theta + \sin (2k + 2)\theta - \sin 2k\theta = \sin 2(k + 1)\theta$$

∴ العلاقة صحيحة عند $n = k + 1$ وبالتالي فهي صحيحة لجميع قيم $n \in \mathbb{N}$.

مثال (٤): باستخدام الاستنتاج الرياضى أثبت أن

$$\sum_{r=1}^n (2r-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$$

الحل

(١) عندما $n = 1$ نجد أن العلاقة صحيحة

(٢) نفرض صحة العلاقة عندما $n = k$ أى أن

$$\sum_{r=1}^k (2r-1)^2 = \frac{1}{3}k(4k^2 - 1) \quad (I)$$

(٣) الآن نبرهن صحة العلاقة عندما $n = k + 1$ لكى نبرهن ذلك نضيف إلى طرفى (I) الحد $(2k + 1)^2$:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{k+1} (2r-1)^2 &= \frac{1}{3}k(4k^2 - 1) + (2k+1)^2 \\ &= \frac{1}{3}k(2k+1)(2k-1) + (2k+1)^2 \\ &= \frac{1}{3}(2k+1)[k(2k-1) + 3(2k+1)] \\ &= \frac{1}{3}(2k+1)(2k+3)(k+1) \\ &= \frac{1}{3}(k+1)(4k^2 + 8k + 3) \\ &= \frac{1}{3}(k+1)[4(k+1)^2 - 1] \end{aligned}$$

وبالتالي فإن العلاقة صحيحة عندما $n = k + 1$ أى أنها صحيحة لجميع قيم $n \in N$.

مثال (٥) : أثبت بالاستنتاج الرياضى أن: مجموع مكعبات أية ثلاث أعداد طبيعية متتالية يقبل القسمة على 9.

الحل

$$S_n = n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$$

$$\text{عندما } n = 1 \quad S_1 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \quad \text{تقبل القسمة على 9.}$$

هذه المقولة صحيحة عندما يكون أول عدد من الأعداد الطبيعية الثلاثة المتتالية هو الواحد.

(٢) نفرض صحة العلاقة عند $n = K$

يقبل القسمة على 9

$$S_k = k^3 + (k+1)^3 + (k + 2)^3$$

نثبت صحة العلاقة عند $n = K+1$

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k + 3)^3 \\ &= [(k+1)^3 + (k+2)^3 + k^3] + [9k^2 + 27k + 27] \\ &= [k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3] + 9(k^2 + 3k + 3) \end{aligned}$$

نلاحظ أن القوس الأول من المقدار S_{k+1} يقبل القسمة على 9 وذلك من صحة

العلاقة (٢) والقوس الثانى يوجد به عامل مشترك 9 ولذلك فإن المقدار S_{k+1}

يقبل القسمة على 9. ∴ المقولة صحيحة لجميع قيم $n \in N$

مثال (٦): أثبت باستخدام الاستنتاج الرياضى أنه إذا كانت $0 < x < 1$ فإن $0 < x^n < 1$ لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

الحل

(١) حيث أن $0 < x < 1$ فإن العلاقة صحيحة عند $n = 1$

(٢) بفرض صحة العلاقة عند $k =$ أى أن $0 < x^k < 1$ لجميع قيم k الصحيحة الموجبة .

(٣) نحاول إثبات صحة العلاقة عند $n = k + 1$

$$\therefore 0 < x^k < 1$$

بضرب حدود هذه العلاقة فى x نحصل على $0 < x^{k+1} < x$

ولكن $0 < x < 1$

$$\therefore 0 < x^{k+1} < x < 1 , \quad 0 < x^{k+1} < 1$$

$\therefore$ العلاقة صحيحة عند $n = k + 1$

وبالتالى فهى صحيحة لجميع قيم n الصحيحة الموجبة .

تمارين

[١] باستخدام الاستنتاج الرياضى أثبت أن:

$$(i) 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2 (2^n - 1)$$

$$(ii) \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$(iii) \sum_{r=1}^n r = \frac{1}{2} n (n + 1)$$

[٢] إذا كان a, b عددين موجبين وكان $a > b$ فأثبت باستخدام الاستنتاج الرياضي أن $a^n > b^n$ حيث $n \in \mathbb{N}$.

[٣] باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت أن:

$$\sin \theta + \sin 3\theta + \dots + \sin (2n-1)\theta = \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta}$$

[٤] باستخدام الاستنتاج الرياضي برهن على أنه حاصل ضرب أى ثلاثة أعداد صحيحة متتالية يقبل القسمة على $3!$.

[٥] باستخدام الاستنتاج الرياضي برهن أن

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \quad |r| < 1$$

وهو قانون مجموع المتسلسلة الهندسية.

[٦] اثبت باستخدام الاستنتاج الرياضي أن:

$$\sum_{r=1}^n \cos r\theta = \frac{\cos \frac{1}{2}(n+1)\theta \sin \left(\frac{n\theta}{2}\right)}{\sin \left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

[٧] أثبت أن:

$$\sum_{r=1}^n r^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$$

[٨] باستخدام الاستنتاج الرياضي أثبت أن :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos \theta + i \sin \theta$$



الباب السابع

المحددات

من الأمور التي تساعد كثيراً في تقديم نظريات رياضية جديدة استخدام رموز معبرة يمكن من خلالها استيعاب عدد كبير من التعبيرات الرياضية وإذا كان اختيار الرمز مناسب فإنه يساعد في تعميم بعض النظريات إلى مستويات أعلى تحذف دون إدخال رموز جديدة . ونعتبر المحددات من أمثلة تلك الرموز التي ساعدت كثيراً في تطوير علم الجبر الخطي فقد أتفق على استبدال المقدار

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{الجبرى} \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad \text{بالرمز}$$

وأن كان هذا لا يبدو تبسيطاً على هذا المستوى فالنظر إلى استبدال المقدار الجبرى .

$$a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{بالرمز}$$

ولا شك أن الرمز الأخير أسهل للذاكرة من المطول . حيث تكثر الإشارات وتتعدد التوليفات من الحروف a, b, c وبصفة عامة فإن المحدده عبارة عن رمز بسيط يتكون من مجموعة من الأعداد موضوعة على شكل عدد من الصفوف وعدد مساوى له من الأعمدة ويحدهما خطان رأسيان. ويسمى عدد من الصفوف (أو الأعمدة) التي تكون المحدده برتبة المحدده . ولكن فيما عدا المحددات من رتبة 2 فإننا لم نذكر كيف يمكن أن نستدل على المقدار الجبرى الذى ترمز له المحدده.

ويلاحظ القارئ كذلك أننا بدأنا بالحديث عن محددات من الرتبة الثانية ، فهل هناك محددات من الرتبة الأولى ؟

ليس هناك ما يمنع من الحديث عن محددات من الرتبة الأولى . حيث تكون المحدده $|a|$ هي رمز بديل للقيمة a ويجب أن تحذر هنا من الخلط بين إشارة المحدد وإشارة القيمة المطلقة فالمحدد $|3|$ تساوى القيمة 3 وكذلك المحدده $|-5|$ تساوى القيمة -5 أما بالنسبة للمحددات من الرتبة 2 مثل

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{المحدد}$$

فإن قيمتها تساوى (حاصل ضرب الحد الموجود فى الركن الأعلى على اليسار والحد الموجود فى الركن الأسفل على اليمين) مطروحاً منه (حاصل ضرب الحد الموجود فى الركن الأسفل على اليسار والحد الموجود فى الركن الأعلى على

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \quad \text{اليمين) أى أن:}$$

$$= 3 (-3) - (-2) (1) = -7 \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \quad \text{وبالتالى فإن المحدده}$$

فإذا ما انتهينا من توضيح كيفية حساب قيمة المحدده من الرتبة الثانية أمكن تعريف كيفية حساب قيمة المحدده من الرتبة الثالثة. يلاحظ أولاً أننا إذا حذفنا عناصر أحد صفوف المحدده من الرتبة الثالثة وحذفنا كذلك عناصر أحد الأعمدة واحتفظنا بالعناصر الأخرى بنفس الترتيب ينتج عندنا محدده من الرتبة الثانية تسمى محدده صغرى . ولتسهيل المناقشة دعنا نتفق على أنه إذا كان لدينا محدده $|A|$ من العناصر a_{ij} لقيم i, j من الواحد الصحيح وحتى رتبه المحدده فأننا نستخدم الرمز $|A_{ij}|$ للدلالة على المحدده الناتجة من

المحدده $|A|$ بعد حذف عناصر الصف رقم i والعمود رقم j مضروباً في $(-1)^{i+j}$ وتسمى $|A|$ بالعامل المرافق للعنصر a_{ij} وفي بعض الأحيان سنكتب a_{ij} بدلاً من $|A_{ij}|$ وعلى هذا فإذا كانت.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A_{31}| (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \quad \text{فإن}$$

$$, |A_{11}| = (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

وهكذا، الآن يمكننا أن نضع تعريفاً لكيفية حساب المحدده من الرتبة الثالثة .

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} |A_{11}| + a_{12} |A_{12}| + a_{13} |A_{13}|$$

وهي ما نحصل عليه بجمع حواصل ضرب كل عنصر من عناصر الصف الأول في عامله المرافق . وتفصيلاً يكتب :

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11} (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} (-1)^4 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22}) \end{aligned}$$

مثال (١): أوجد قيمة المحدد

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

الحل

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 2(-1) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (-5 - 8) - 2(10 + 2) + 3(8 - 1) = -16$$

وبصفة عامة فإن قيمة أى محددة هى مجموع حواصل ضرب عناصر الصف الأول كل فى عامله المرافق وبذلك فإن قيمة المحدده .

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} (-1)^2 \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{12} (-1)^3 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + a_{13} (-1)^4 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{14} (-1)^5 \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

وهكذا بالنسبة لحساب قيمة المحددات من أى رتبة .

خواص المحددات:

سنبحث بعض خواص المحددات وسنكتفى فى الشرح بالمحددات ذات الرتبة الثالثة مع ملاحظة أن هذه الخواص يمكن تطبيقها على أية محددة من أية رتبة .

١- لا تتغير قيمة المحدده إذا ما جعلنا جميع الصفوف وجميع الأعمدة صفوف وبنفس الترتيب (أى أن الصف الأول يصبح العمود الأول وهكذا) .
فمثلاً قيمة المحدده

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A| = a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{31} a_{23}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22})$$
 هو

إذا استبدلنا الصفوف والأعمدة تصبح $|A|$ على الصورة

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

وقيمته هي

$$|\Delta| = a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31})$$

وبمقارنة الحدود نرى أن قيمتى المحددتان $|\Delta|$ و $|A|$ متساويتان ويتضح من هذه الخاصية أن قيمة المحدده تساوى مجموع حواصل ضرب عناصر العمود الأول كل فى عامله المرافق .

٢- تتغير إشارة المحدده بوضع صفين (أو عمودين) كل محل الآخر :
فمثلاً المحدده :

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23}) \\
 &\quad - a_{21} (a_{12} a_{33} - a_{32} a_{13}) + a_{31} (a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13}) \\
 |A| &= -[a_{21} (a_{12} a_{33} - a_{32} a_{13}) - a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{32} a_{23})] \\
 &\quad + a_{31} (a_{22} a_{13} - a_{12} a_{23}) \\
 &= - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

والمحددة الأخيرة هي نفس المحدده $|A|$ بعد وضع الصفين الأول والثاني كل مكان الآخر.

ومن الخاصتين (١) ، (٢) نستنتج أن قيمة أى محددة هي مجموع حواصل ضرب عناصر أى صف (أو عمود) كل في عامله المرافق.

٣- تتعدم قيمة المحدده إذا تساوت جميع العناصر المتناظرة في صفين (أو عمودين) ويتضح ذلك بسهولة لأننا إذا استبدلنا هذين الصفين (أو العمودين) كانت $|A| = 0$ ومنها $|A| = -|A|$

٤- إذا ضربت جميع عناصر أى صف (أعمود) لمحددة ما فى نفس العدد k فإن قيمة المحددة تضرب فى نفس هذا العدد k . لنفرض أن الصف الأول فى المحددة $|A|$ ضرب فى k ينتج أن:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = ka_{11} (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) \\ - ka_{12} (a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + ka_{13} (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ = k [a_{11} (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12} (a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) \\ + a_{13} (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})] = k |A|$$

٥- إذا تكونت عناصر صف (أو عمود) فى محددة ما من مجموع جبرى لكميات عددها k فإن المحددة تساوى نفس المجموع الجبرى لمحددات أخرى عددها k تتفق فيما بينها وبين المحددة الأصلية فيما عدا عناصر الصف أو العمود محل الاعتبار فإن عناصره توزع على المحددات المختلفة حسب الصورة.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} - c_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} - c_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + b_{31} - c_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

الطرف الأيسر يساوى .

$$(a_{11} + b_{11} - c_{11}) |A_{11}| + (a_{21} + b_{21} - c_{21}) |A_{21}| +$$

$$(a_{31} + b_{31} - c_{31}) |A_{31}|$$

حيث $|A_{11}|$, $|A_{21}|$, $|A_{31}|$ هي العوامل المرافقة للعناصر a_{11} , a_{21} , a_{31} في المحدده A .

إذن الطرف الأيسر يساوى .

$$(a_{11} |A_{11}| + a_{21} |A_{21}| + a_{31} |A_{31}|) +$$

$$(b_{11} |A_{11}| + b_{21} |A_{21}| + b_{31} |A_{31}|) -$$

$$(c_{11} |A_{11}| + c_{21} |A_{21}| + c_{31} |A_{31}|)$$

وهذا يساوى مفكوك الطرف الأيمن .

ونلاحظ أن الخاصية (٤) هي حالة خاصة من الخاصية (٥) .

٦- فى آية محددة إذا أضفنا (جمعاً جبرياً) لعناصر صف (عمود) ما أحد مضاعفات العناصر المناظرة فى أى صف (عمود) آخر فإن قيمة المحدد لا تتغير . فمثلاً إذا كان لدينا المحدده .

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

وأضفنا إلى عناصر الصف الثالث أربعة أمثال عناصر الصف الثانى نتجت المصفوفة

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + 4a_{21} & a_{32} + 4a_{22} & a_{33} + 4a_{23} \end{vmatrix}$$

وبتطبيق الخاصية رقم (٥) فإن قيمة $|\Delta|$ تساوى .

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 4a_{21} & 4a_{22} & 4a_{23} \end{vmatrix}$$

وبتطبيق الخاصية رقم (٤) فإن هذا يساوى .

$$|A| + 4 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

والمحددة الأخيرة تساوى الصفر لتشابه صفين فيها وعلى ذلك فإن :
 $|\Delta| = |A|$ وتستخدم الخواص السابقة لتسهيل حساب قيم المحددات .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{مثال (٢):} \quad \text{أوجد قيمة المحددة}$$

الحل

نعتمد على استخدام خواص المحددات للوصول إلى محددة تكثر فيها العناصر الصفرية لأن ذلك يسهل فى عمليات الضرب .

أولاً: بإضافة ضعف عناصر العمود الثالث إلى عناصر العمود الثانى نجد أن :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{خاصية (٦)} \quad = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 6 & 10 & 3 \end{vmatrix}$$

ثانياً : بطرح عناصر العمود الثالث من عناصر العمود الأول فى المحدده

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 8 & 3 \\ 3 & 10 & 3 \end{vmatrix} = -44 \quad \text{الأخيرة .}$$

مثال (٢) : أثبت صحة المتطابقة الآتية :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

الحل

بطرح عناصر العمود الثالث من عناصر العمود الأول ويطرح عناصر العمود

الثانى من عناصر العمود الأول نحصل على المحدده الآتية:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

بفك المحدد باستخدام عناصر الصف الأول

$$\Delta = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$\Delta = (b-a)(c-a)[(c+a)-(b+a)] = (b-a)(c-a)(c-b)$$

مثال (٣) : أثبت بدون فك المحدده أن :-

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2+a^2 \\ 1 & b & 2+a^2 \\ 1 & c & 2+a^2 \end{vmatrix} = 0$$

الحل

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 2+a^2 \\ 1 & b & 2+a^2 \\ 1 & c & 2+a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & b & 2 \\ 1 & c & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & a^2 \\ 1 & c & a^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} + a^2 \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 0 + a^2 \times 0 = 0$$

وذلك لأن كلاً من المحدده الأولى والثانية تساوى صفراً لتساوى عمودين (خاصية ٣)
مثال (٤): أثبت بدون فك المحدده أن:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$$

الحل

الطرف الأيسر: بأخذ 2 عامل مشترك من الصف الأول وإضافة عناصر الصف الثاني إلى عناصر الصف الثالث .

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$= 2 (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 (a+b+c) (0) = 0$$

مثال (٥): أثبت أن $x = 1$ هو إحدى جذور المعادلة :

$$\begin{vmatrix} x & 2 & x+2 \\ 2 & 1+3x & 3 \\ 1 & x+1 & 2x+2 \end{vmatrix} = 0$$

الحل

هناك طرق كثيرة لإثبات أن $x = 1$ هو أحد جذور المعادلة السابقة منها :-

أ- نعوض في المحددة عن $x = 1$ ثم نثبت أن قيمة المحددة تساوى صفراً.

ب- تفك المحددة ثم نعوض عن $x = 1$ فنجد أن القيمة تساوى صفراً .

ج- نثبت أن $(x - 1)$ هو عامل من العوامل المحددة .

بالتعويض عن $x = 1$ في المحددة نجد أن:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

∴ $x = 1$ هو إحدى جذور المعادلة المعطاة .

تفاضل المحددات :

بفرض أن :-

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

نعرف تفاضل $|A|$ بالنسبة للمتغير x كما يلي

$$\frac{d|A|}{dx} = \begin{vmatrix} \frac{da_{11}}{dx} & \frac{da_{12}}{dx} & \frac{da_{13}}{dx} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \frac{da_{21}}{dx} & \frac{da_{22}}{dx} & \frac{da_{23}}{dx} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \frac{da_{31}}{dx} & \frac{da_{32}}{dx} & \frac{da_{33}}{dx} \end{vmatrix}$$

ملحوظة: يمكن تفاضل المحدد $|A|$ بالنسبة للأعمدة بدلاً من الصفوف

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & x^2 \\ 6 & 7 & 9 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

مثال (٦) : أوجد قيمة $\frac{d|A|}{dx}$ حيث

الحل

$$\frac{d|A|}{dx} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2x \\ 6 & 7 & 9 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & x^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} 2 & 3 & x^2 \\ 6 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2x(6+21) + 0 + 0 = 54x$$

استخدام المحددات في حل المعادلات التي من الدرجة الأولى (طريقة

كرامر):

نفرض أن لدينا المعادلتين :-

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \quad (1), \quad a_2 x + b_2 y = c_2 \quad (2)$$

ضرب (١) في a_2 ، (2) في a_1 ، وبالطرح نحصل على

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

بضرب المعادلة (١) في b_2 والمعادلة (٢) في b_1 والطرح نحصل على :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_x}{\Delta}$$

وبذلك يكون طريقة الحل بأن نوجد محددة المعاملات والتي نرمز لها بالرمز Δ ثم نوجد Δ_x وهى نفس محددة المعاملات بعد استبدال معاملات x بالحدود المطلقة ثم نحسب Δ_y وهى نفس محددة المعاملات بعد استبدال معاملات y بالحدود المطلقة ثم نوجد x, y من العلاقتين .

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} , \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

وبالمثل فى حالة ثلاث معادلات فى ثلاث مجاهيل :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$

كما سبق يمكن إيجاد الحل على الصورة .

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} , \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} , \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

مثال (٧) : باستخدام المحددات أوجد حل المعادلتين:

$$x + y = 3 , \quad 4x - y = 2$$

الحل

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -5 \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1. , \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2.$$

مثال (٨) : باستخدام المحددات أوجد حل المعادلات

$$2x + y - z = 4$$

$$5x - 4z - 9 = 0$$

$$3x + 4y + z - 6 = 0$$

الحل

$$2x + y - z = 4$$

$$5x - 4z = 9$$

$$3x + 4y + z = 6$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -5, \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 9 & 0 & -4 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 9 & -4 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -5, \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 9 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 5$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{5}{-5} = -1$$

مثال (٩): باستخدام المحددات أوجد حل المعادلات .

$$x + 2z = 1$$

$$3x - y + z = 2$$

$$4y + 5z = -1$$

الحل

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 15, \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -10, \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{15} = 1/3, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -2/3, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 1/3$$

معادلة الخط المستقيم الذى يمر بنقطتين :

معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطتين (x_1, y_1) و (x_2, y_2) يمكن التعبير عنها فى صورة محددة كالآتى :-

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وهذا واضح لأنه بطرح الصف الثانى من كلاً من الصفين الأول والثالث فإن:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-(x - x_1)(y - y_1) + (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$$

$$(y - y_1)(x_2 - x_1) = (x - x_1)(y_2 - y_1)$$

$$\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{y - y_1}$$

ومنها

وهذه المعادلة المعروفة للخط المستقيم المار بنقطتين .

مثال (٩) : أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(0, 1), (1, 0)$.

الحل

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(1-0) - y(0-1) + 1(0-1) = 0$$

$$x + y - 1 = 0$$

$$x + y = 1$$

أى أن معادلة الخط المستقيم هي

مساحة المثلث المعروفة رؤوسه

إذا كان لدينا مثلث إحداثيات رؤوسه هي (x_3, y_3) , (x_2, y_2) , (x_1, y_1) فإننا نعلم أن مساحته .

$$A = \frac{1}{2} [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

وهذا يمكن كتابته على صورة محدد كالآتي:

مع العلم بأن المساحة هي القيمة المطلقة .

نتيجة : شرط وقوع ثلاث نقط إحداثياتها (x_3, y_3) , (x_2, y_2) , (x_1, y_1)

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

على استقامة واحدة هو

ملحوظة : من هنا يمكن استنتاج معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطتين

(x_2, y_2) , (x_1, y_1) فنجد أنها :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

مثال (١٠) : أوجد مساحة المثلث الذى رؤوسه هي $(1,2)$, $(0,1)$, $(1,0)$

الحل

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (0+1+1) = 1$$

تمارين

[١] أوجد قيمة المحددات الآتية :-

$$(i) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \quad (ii) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

[٢] باستخدام المحددات أوجد حل المعادلات الآتية

$$\begin{aligned} (i) \quad & 3x + 2y + 8z = 38 \\ & x + 3y + 9z = 37 \\ & 2x + y + z = 15 \\ & x + 2y + 2z = 6 \\ & 2x + 4y + z = 7 \\ & 3x + 2y + 9z = 14 \end{aligned}$$

[٣] باستخدام المحددات أوجد مساحة المثلث الذى رؤوسه

$$\begin{aligned} (i) \quad & (3,1) , (1,2) , (3,-2) \\ (ii) \quad & (-1,1) , (-2,2) , (1,4) \end{aligned}$$

[٤] أثبت أن النقط الآتية تقع على استقامة واحدة

$$\begin{aligned} (i) \quad & (-1,-1) , (3,3) , (4,4) \\ (ii) \quad & (3,-3) , (5,-4) , (0,-7) \end{aligned}$$

[٥] برهن أن $x=1$ هو أحد جذور المعادلة

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = 0$$

[٦] أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2a & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

[٧] إذا كانت $a + b + c = 0$ فأوجد جذور المعادلة .

$$\begin{vmatrix} a-x & b & c \\ b & c-x & a \\ c & a & b-x \end{vmatrix} = 0$$

[٨] أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$



المصفوفات

$$a_{11}X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_{1n} = y_1$$

المعادلات :

$$a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \dots + a_{2n} X_n = y_2 \quad (1)$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n = y_n$$

هي معادلات خطية ذات n من المجاهيل يمكن كتابتها على الصورة .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix} \quad (2)$$

حيث مجموعة المعاملات a_{ij} تظهر على هيئة مستطيل مكون من صفوف عددها m وأعمدة عددها n . ويدل الرمز i فى العنصر a_{ij} على رقم الصف والرمز الثانى j على رقم العمود والذى يقع العمود فيها .

يسمى هذا المستطيل بالمصفوفة (Matrix) وتسمى العناصر a_{ij} بعناصر المصفوفة وللاختصار سوف نرمز للمصفوفة بالرمز $[a_{ij}]$ المجاهيل $X_1, X_2, \dots, X_n$, تظهر فى صورة مصفوفة مكونة من n من الصفوف وعمود واحد . وكذلك الأعداد $y_1, y_2, \dots, y_n$ تظهر فى صورة مصفوفة مكونة من m من الصفوف وعمود واحد .

المصفوفة في المعادلة (2) يمكن أن نقول أنها المصفوفة $[a_{ij}]$ ذات الدرجة

$$m \times n \text{ أو المصفوفة } A = [a_{ij}] \text{ ذات الدرجة } m \times n$$

المصفوفة المربعة

إذا كانت $m = n$ فإن المصفوفة A تسمى مربعة من الدرجة n

خواص المصفوفات :

(١) التساوي : يقال أن المصفوفتين $A = [a_{ij}]$ ، $B = [b_{ij}]$ متساويتان

إذا وفقط كان هاتان المصفوفتان من نفس الدرجة وكان كل عنصر من إحدهما

مساوياً لنظيره في الثانية : أى أن إذا كان : $a_{ij} = b_{ij}$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(٢) المصفوفة الصفيرية : تسمى المصفوفة A بالمصفوفة الصفيرية إذا

انعدم كل عنصر من عناصرها ويرمز لها بالرمز $[0]$

(٣) مصفوفة الوحدة : تسمى المصفوفة A بمصفوفة الوحدة إذا كان

كل عنصر من عناصر قطرها الرئيس مساوياً الواحد الصحيح أما بقية

العناصر فإنها تنعدم أى أن :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(٤) جمع المصفوفتين : إذا كانت $A = [a_{ij}]$ ، $B = [b_{ij}]$

مصفوفتين من نفس الدرجة $m \times n$ فإن المجموع يعرف بأنه المصفوفة .

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

ذات الدرجة $m \times n$. وكذلك الطرح $A - B$ يعرف بأنه المصفوفة .

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$$

مثال (١) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+0 & 0+0 \\ -1+2 & 4+0 & 0-1 \\ 3+4 & 2+2 & 1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-3 & 3-0 & 0-0 \\ -1-2 & 4-0 & 0+1 \\ 3-4 & 2-0 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(٥) الضرب في عدد k : إذا كان k مقداراً عددياً فإن حاصل ضرب

k في المصفوفة $A = [a_{ij}]$ يكتب على الصورة أى أن : كل عنصر من

عناصر المصفوفة A يجب أن يضرب في k .

مثال (٢) إذا كانت .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B, A - C, -2A, A + (B - C)$$

فأوجد

الحل

$$A+B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}, A-C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$-2A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 9 \\ -10 & 0 & -4 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} A+(B-C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

تعريف : المصفوفة $-A$ تسمى سالب المصفوفة A وينتج عن طريق ضرب كل عنصر من عناصر A في -1 .

(٦) ضرب مصفوفتين : إذا كانت المصفوفة $A = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1m}]$ من الدرجة $1 \times m$ والمصفوفة B من الدرجة $m \times 1$ والمصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} \text{ والتي درجتها } m \times 1 \text{ فإن المصفوفة}$$

$$C = [a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + \dots + a_{1m} b_{m1}]$$

والتي درجتها 1×1 هي حاصل ضرب المصفوفتين A, B أي أن $A \times B = C$

$$[a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1m}] \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{bmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1m}b_{m1}$$

وتنتج هذه العملية من حاصل ضرب كل عنصر من الصف بالعنصر المقابل له في العمود ونجمع حواصل الضرب .

مثال (٣) $[2 \ 3 \ 4] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = [2 \times 1 + 3 \times 0 + 4 \times 2] = [10]$

وعموماً إذا كانت $a = [a_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة $m \times p$ ، $B = [b_{ij}]$ مصفوفة من الدرجة $p \times n$ فإن : المصفوفة $C = [C_{ij}]$ هي حاصل ضرب المصفوفتين A, B هي من الدرجة $m \times n$ حيث أن A مكونه من m من الصفوف B مكونه من n من الأعمدة فإن حاصل الضرب $C = A \times B$ يتكون بضرب كل صف من A مره واحدة فقط في كل عمود من أعمدة B .

وإذا كانت A, B مصفوفتان فإنه يقال أن حاصل الضرب AB معرف إذا فقط إذا كان عدد أعمدة A مساوياً لعدد صفوف B .

وقد يحدث أن يكون AB معرف ولكن BA غير معرف. أيضاً قد يحدث أن يكون حاصل الضرب AB, BA معرفان ولكن $AB \neq BA$

نظرية : ضرب المصفوفات يحقق الخواص الآتية

- (i) $A (BC) = (AB) C$
- (ii) $A (B + C) = AB + AC$
- (iii) $(B + C) A = BA + CA$
- (iv) $k (AB) = (kA) B = A (kB)$

(٧) منقول المصفوفة منقول المصفوفة A يرمز له بالرمز A^T وهو ناتج

من تبديل الأعمدة والصفوف في المصفوفة A فإذا كانت $A = [a_{ij}]$ فإن $A^T = [a_{ji}]$

مثال (٤) إذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{فإن } A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

نظرية : تحويل المصفوفات إلى منقولات يحقق الخواص الآتية :

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(A^T)^T = A$$

$$(A B)^T = B^T A^T$$

$$(kA)^T = k A^T$$

حيث k مقدار ثابت

(٨) **المصفوفات المتماثلة** : إذا حققت المصفوفة المربعة $A = [a_{ij}]$

العلاقة $A = A^T$ فإنه يقال أن A مصفوفة متماثلة أما إذا كانت $A = -A^T$

فإن A مصفوفة شبة متماثلة .

مثال (٥) المصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 6 \end{bmatrix}$ متماثلة بينما المصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ غير متماثلة.

(٩) **المصفوفة المترافقة المركبة** إذا كانت A مصفوفة عناصرها

أعداد مركبة فإن المصفوفة التي تنتج بالتعويض عن كل عنصر في المصفوفة

A بمرافقة تسمى المصفوفة المترافقة و يرمز لها بالرمز $\bar{A}$.

مثال (٦) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1+2i & i \\ 3 & 2-3i \end{bmatrix}$ فإن $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-2i & -i \\ 3 & 2+3i \end{bmatrix}$

(١٠) **المصفوفات القابلة للقلب (معكوس المصفوفة)**

المصفوفة المربعة A يقال أنها قابلة للقلب (لها معكوس) إذا وجدت مصفوفة B بحيث أن $AB = BA = I$ حيث I تسمى مصفوفة الوحدة .

المصفوفة المربعة A يقال أنه قابلة للقلب (لها معكوس) إذا وجدت مصفوفة B بحيث أن $AB = BA = I$

حيث I تسمى مصفوفة الوحدة .

ولذلك سوف تسمى المصفوفة B بمعكوس المصفوفة A ونرمز لها بالرمز $A^{-1} = B$

فإذا وجد المقلوب A^{-1} فإنه يلعب دوراً مشابهاً للدور الذي يلعبه مقلوب أي عدد في الجبر العادي ولتوضيح فكرة المقلوب نفترض أن لدينا

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{فإن}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{وأن}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$AB = BA = I$$

أي أن

ومن التعريف السابق لمقلوب المصفوفة يمكن القول أن $B = A^{-1}$ ويجب أن تعرف أنه إذا كان لأي مصفوفة مقلوب فإن هذا المقلوب يكون وحيداً. والآن سوف نعرض طريقة إيجاد المعكوس للمصفوفة باستخدام محدداتها ومصفوفة مرافقتها المحورة .

إذا كان لدينا المصفوفة A فإن الخطوات التي تتبع لإيجاد معكوس المصفوفة A فإن الخطوات التي تتبع لإيجاد معكوس المصفوفة يمكن تلخيص في الآتي.

١- إيجاد قيمة محدد المصفوفة $|A|$ ويجب أن لا تساوي الصفر حتى يوجد المعكوس .

٢- إيجاد مصفوفة المرافقات F وهي تحتوي علي المرافقات المناظرة لكل عنصر في المصفوفة.

٣- إيجاد مصفوفة المرافقات المحورة F .

٤- إيجاد معكوس المصفوفة A باستخدام العلاقة $A^{-1} = \frac{F}{|A|}$.

مثال (٧) أوجد معكوس المصفوفة التالية

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل

$$|A| = 4 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ = 24 \neq 0$$

$$F = \left[\begin{array}{c|c|c} \left| \begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{array} \right| & - & \left| \begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 0 & 6 \\ 2 & 0 \end{array} \right| \\ \hline - & \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{array} \right| & - & \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right| \\ \hline \left| \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 6 & 2 \end{array} \right| & - & \left| \begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{array} \right| \end{array} \right]$$

وبعد إجراء العمليات الحسابية نجد أن

$$F = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & 24 \end{bmatrix}, \quad F' = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -8 \\ -12 & 0 & 24 \end{bmatrix}$$

وفى النهاية يمكن أن نحصل على معكوس المصفوفة كالتالى :-

$$A^{-1} = \frac{F'}{|A|} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -8 \\ -12 & 0 & 24 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ويمكن التأكد من ذلك بالحصول على AA^{-1} فنجد أن

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

استخدام المصفوفات فى حل المعادلات الخطية :-

إذا كان لدينا n من المعادلات الخطية كل منها تحتوى على n من

المجهول $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

.

$$a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n$$

فإنه يمكننا كتابة هذه المعادلات على شكل معادلة مصفوفات كما يلي :-

$$A X = B$$

حيث :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

وباستخدام جبر المصفوفات يمكن حل معادلة المصفوفات السابق ذكرها . وذلك

بضرب طرفي تلك المعادلة في المعكوس A^{-1} فنحصل على .

$$A^{-1} A X = A^{-1} B$$

$$A^{-1} A = I \quad I X = A^{-1} B \quad \Rightarrow \quad \text{ولكن}$$

$$\therefore X = A^{-1} B$$

ولذلك لحل المعادلات الخطية فإنه يجب الحصول أولاً على A^{-1} ثم ضربها

في B .

مثال (٨) حل المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات .

$$x_1 + 2x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$$

الحل

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

نحصل أولاً على A^{-1} وذلك كما يلي :-

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 0 + 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 1 \neq 0$$

$$F = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 6 & -7 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, F' = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -1 & -7 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{F'}{|A|} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 \\ -1 & -7 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

وفي النهاية للحصول على المجاهيل .

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 2 \\ 1 & 7 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -30 \\ 35 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x_1 = -30, x_2 = 35, x_3 = 17$$

مثال (٩) حل المعادلات الخطية الآتية باستخدام المصفوفات .

$$x_1 + 2x_3 = 1, \quad 3x_1 - x_2 + x_3 = 2, \quad 4x_2 + 5x_3 = -1$$

الحل

نحصل أولاً على A^{-1} وذلك كما يلي :-

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -9 - 0 + 24 = 15$$

$$F = \begin{bmatrix} -9 & -15 & 12 \\ 8 & 5 & -4 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \quad F' = \begin{bmatrix} -9 & 8 & 2 \\ -15 & 5 & 5 \\ 12 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{F'}{|A|} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -9 & 8 & 2 \\ -15 & 5 & 5 \\ 12 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -9 & 8 & 2 \\ -15 & 5 & 5 \\ 12 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

وفى النهاية للحصول على المجاهيل .

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -9 & 8 & 2 \\ -15 & 5 & 5 \\ 12 & -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x_1 = 1/3, \quad x_2 = -2/3, \quad x_3 = 1/3$$

تمارين

١- إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} p & q \\ r & g \\ t & u \end{bmatrix}$$

أوجد C بحيث يكون $A + B - C = 0$.

٢- إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

فأوجد :

$$AB, \quad 2A + 3B, \quad A-B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

٣- إذا كانت

$$A^2 - 4A - 5I = 0 \quad \text{فبرهن أن}$$

٤- أوجد حاصل ضرب المصفوفات الآتية :-

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} [2 \quad 1 \quad 3] (iv) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

٥- إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

فأوجد $A(B+C)$, $(AB)C$, AB , (AC)

٦- أوجد معكوس المصفوفات الآتية :-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

٧- أوجد المعكوس الضربي للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

٨- إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = C = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

فأثبت أن :-

$$AB = BA = 0$$

$$AC = A$$

$$CA = C$$

ACB CBA

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

٩- باستخدام المصفوفات أوجد حل المعادلات الآتية :-

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & 4x + 2y - z = 5 \\ & 3x - y - z = -2 \\ & x + y - z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad & x + y + z = 1 \\ & 2x + 2y + z = 7 \\ & x - 5y + 3z = 3 \end{aligned}$$

(١٠) - باستخدام معكوس المصفوفة حل المعادلات الآتية :-

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & x_1 + 2x_3 = 1, \quad 3x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ & 4x_2 + 5x_3 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + y + t = 1, \quad 2x + 2y + t = 7 \\ & x - 5y + 3t = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 - x_3 = -3 \\ & 4x_1 + x_2 = -2 \\ & x_2 + x_3 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ & 2x_2 - x_3 = 1 \\ & -4x_1 + x_2 - x_3 = 6 \end{aligned}$$

~~~~~

## الباب الأول

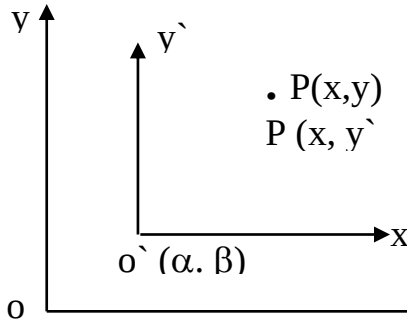
### تغيير المحورين

يسهل حل كثير من مسائل الهندسة بتغيير وضع محوري الأسناد إلى أوضاع أخرى مناسبة و سوف ندرس ثلاثة أنواع لتغيير محوري الإسناد

١- **النقل** و فيه تنقل نقطة الأصل مع بقاء المحورين موازيين لوضعهما ٢- **الدوران** و فيه تبقى نقطة الأصل كما هي مع دوران المحورين حولهما خلال زاوية ما .

٣- **النقل مع الدوران** وهذه هي الحالة العامة و فيها تنقل نقطة الأصل ثم يتبع ذلك دوران المحورين .

٤- **أولاً : نقل المحورين** نفرض أن  $xOy$  هو مستوى الإسناد الأصلي وأن  $O'$  نقطة في هذا المستوي و إحداثياتها  $(\alpha, \beta)$  فإذا أخذنا محورين آخرين  $O'x', O'y'$  موازيين للمحورين  $Ox, Oy$  على الترتيب لتكوين مستوى الإسناد  $x'O'y'$  الذي يعرف بمستوى الإسناد الجديد .



إذا كانت  $p$  كانت نقطة ما فيكون إحداثياتها  $(x, y)$  بالنسبة لمستوى الإسناد الأصلي  $(x', y')$  بالنسبة لمستوي الإسناد الجديد كما بالشكل السابق يتضح أن :

$$x = x' + \alpha$$

$$y = y' + \beta$$

(I)

وتسمى (I) بعلاقتي التحويل في هذه الحالة .

مثال (١) أوجد المعادلة الجديدة للمعادلة الآتية  $x^2 + y^2 + 2fx + 2gy + c = 0$  بعد نقل المحاور الأصلية إلى محورين متوازيين للمحورين الأصليين و متقاطعين في النقطة  $(-f, -g)$

الحل

بالتعويض في التحويل (I) نجد أن :  $x = x' - f$   $y = y' - g$   
 ∴ المعادلة المعطاة تأخذ الصورة

$$(x' - f)^2 + (y' - g)^2 + 2f(x' - f) + 2g(y' - g) + c = 0$$

$$x'^2 + y'^2 = f^2 + g^2 - c \quad \text{أى أن :}$$

و نلاحظ أن المعادلة الأخيرة لا تحتوى على حدود من الدرجة الأولى في  $x'$ ,  $y'$ .

مثال (٢) :- إذا نقلنا نقطة الأصل إلى النقطة  $(-2, 1)$  مع بقاء المحورين موازيين لوضعهما الأصلى فأوجد المعادلة الجديدة للمنحنى .

$$x^2 + 10xy + y^2 - 6x + 18y - 7 = 0$$

الحل

باستخدام التحويل (I) نجد أن  $x = x' - 2$   $y = y' + 1$   
 بالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على  $x'^2 + y'^2 + 10x'y' + 8 = 0$

مثال (٢) :- أزل حدود الدرجة الأولى في المعادلة

$$4x^2 + y^2 - 16x + 6y + 9 = 0$$

الحل

$x = x'$   $y = y' + k$  بوضع  
 $+ h$   
 بالتعويض في المعادلة المعطاة

$$4 \quad (x' + h)^2 + (y' + k)^2 - 16(x' + h) + 6(y' + k) + 9 = 0$$

$$4x'^2 + y'^2 + (8h - 16)x' + (2k + 6)y' + 4h^2 + k^2 - 16h + 6k + 9 = 0$$

و لجعل المعادلة خالية من الدرجة الأولى تساوى معامل كل من  $x'$ ,  $y'$  بالصفـر و ينتج أن :-

$$8h - 16 = 0$$

$$h = 2$$

$$2k + 6 = 0$$

$$k = -3$$

و تؤول المعادلة إلى :

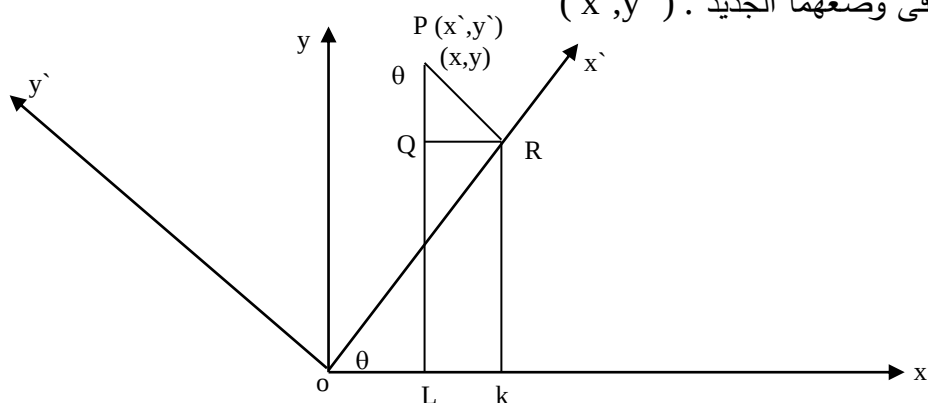
$$4x'^2 + y'^2 + (16 + 9 - 32 - 18 + 9) = 0$$

$$4x'^2 + y'^2 = 16$$

أى

### ثانياً: - دوران المحورين :

نفرض أن المحورين دارا زاوية مقدارها  $\theta$  حول "0" و أن P أى نقطة فى المستوى إحداثياتها بالنسبة للمستوى  $xOy$  هى  $(x, y)$  و بالنسبة للمحورين فى وضعهما الجديد  $(x', y')$ .



فى الشكل نجد أن :-

$$OL = OK - LK = OK - RQ$$

$$PL = PQ + QL = PQ + RK$$

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta$$

أى أن :

$$y = x' \sin \theta + y' \cos \theta \quad (II)$$

و يعتبر ( II ) هو التحويل المطلوب

**مثال (٤) :-** إذا دار محوران بزاوية مقدارها  $\frac{\pi}{4}$  فأوجد المعادلة الجديدة للمنحنى.

$$5x'^2 + 2xy' + 5y'^2 = 2$$

الحل

بالتعويض عن  $\theta = \frac{\pi}{4}$  فى التحويل (II) ثم التعويض فى المعادلة للمنحنى

$$3x'^2 + 2y'^2 = 1$$

المعطى نحصل على :

وفى هذه المعادلة الأخيرة عند دوران المحورين بزاوية معينة أمكن التخلص من الحد  $xy$  أى أنه يمكن حل المعادلة فى صورتها العامة كما يوضح ذلك المثال الآتى :

**مثال (٥) :** أوجد الزاوية التى يدورها المحوران بحيث يتلاشى الحد  $xy$  فى المعادلة.

$$ax'^2 + 2hxy' + by'^2 + 2fx + 2gy + c = 0$$

الحل

بإستخدام التحويل (II) تأخذ هذه المعادلة الصورة

$$a(x' \cos \theta - y' \sin \theta)^2 + 2h(x' \cos \theta - y' \sin \theta)(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + b(x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2 + \dots + c = 0$$

بمساواة معامل  $xy$  بالصفر بالمعادلة السابقة نجد أن :

$$-2a \sin \theta \cos \theta + 2h \cos^2 \theta - 2h \sin^2 \theta + 2h \sin \theta \cos \theta = 0$$

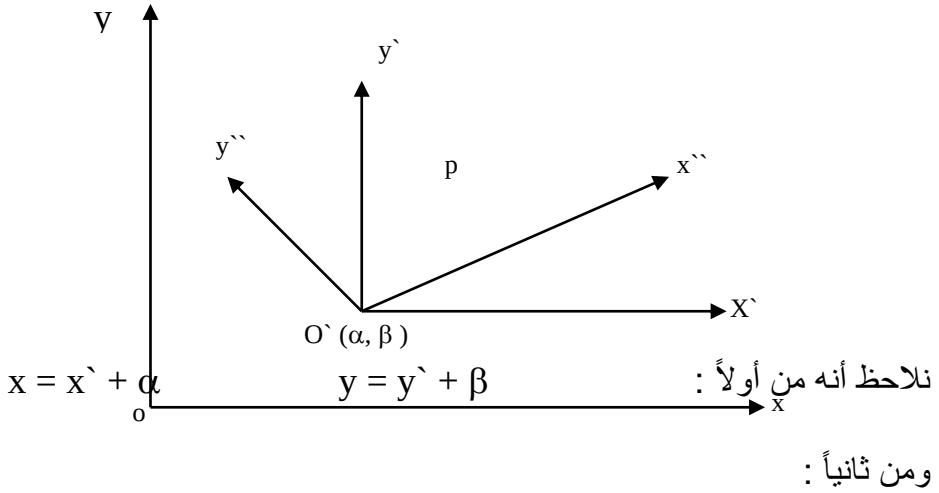
$$\therefore 2h(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 2(a-b) \sin \theta \cos \theta$$

$$2h \cos 2\theta = (a-b) \sin 2\theta$$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{2h}{a-b} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2h}{a-b} \right)$$

### ثالثاً : الحالة العاملة ( النقل والدوران )

تعتبر هذه الحالة تجميع للحالتين السابقتين أى بمعنى ننقل نقطة الأصل أولاً ثم ندير المحاور فى وضعها الجديد خلال زاوية  $\theta$  حول نقطة الأصل الجديدة  
نفرض أن نقطة الأصل قد نقلت إلى النقطة  $O'(\alpha, \beta)$  ثم دار المحوران زاوية  $\theta$ .  
نفرض أن  $P$  أى نقطة فى المستوى إحداثياها بالنسبة للمحورين  $x \ O \ y$  هما  $(x, y)$  وبالنسبة للمحورين  $x' \ O' \ y'$  هما  $(x', y')$  أما بالنسبة للمحورين  $x'' \ O'' \ y''$  هما  $(x'', y'')$



$$x' = x'' \cos \theta - y'' \sin \theta$$

$$y' = x'' \sin \theta + y'' \cos \theta$$

وبتجميع أولاً وثانياً نحصل على :

$$x = x'' \cos \theta - y'' \sin \theta + \alpha$$

$$y = x'' \sin \theta + y'' \cos \theta + \beta$$

( III )

وهو التحويل المطلوب .

مثال (٦) :- إذا نقلت نقطة الأصل للنقطة ( 2 , -1 ) ثم دار المحوران خلال زاوية مقدارها  $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$  فأوجد المعادلة الجديدة للمنحنى :

$$5x^2 + 4xy - 2y^2 + 2x + 12y - 1 = 0$$

الحل

$$\therefore \tan \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

باستخدام التحويل ( III ) نجد أن :

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}} x'' - \frac{1}{\sqrt{5}} y'',$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{5}} x'' + \frac{2}{\sqrt{5}} y'' + 2$$

وبالتعويض فى المعادلة المعطاة نحصل على .

$$26x''^2 - 16x''y'' - 13y''^2 + 50 = 0$$

### تمارين

[١] أوجد النقطة التى تنتقل إليها نقطة الأصل بحيث يتلاشى حدود الدرجة

الأولى فى المعادلات الآتية :-

$$x^2 + 2xy - 2y^2 + 4x + 2y + 6 = 0,$$

$$3x^2 + 4xy + 3y^2 - 2x - 2y = 0,$$

$$6x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 7 = 0.$$

[٢] إذا دار المحوران زاوية مقدارها  $\frac{\pi}{2}$  فأوجد المعادلة الجديدة لكل من :

$$x + y = 0,$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 1$$

فى المعادلة.  $x y$  [٣] أوجد الزاوية التى يدورها المحوران بحيث يتلاشى الحد

$$x^2 - xy + 2y^2 = 6$$

[٤] بنقل نقطة الأصل مع دوران المحورين ضع المعادلات التالية فى أبسط

صورة

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$$

$$x^2 + xy + y^2 - 2x - y - 4 = 0$$

من المعادلات الآتية :  $xy$  [٥] احذف الحد

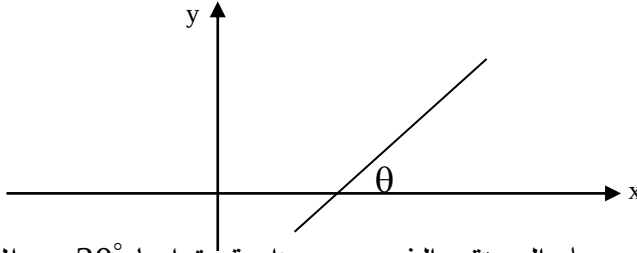
$$8x^2 + 4xy + 5y^2 = 36$$

$$(x + y)^2 - 8(y - x) = 0$$

## الباب الثانى

## الخط المستقيم

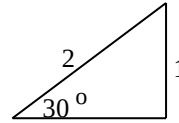
تعريف: ميل الخط المستقيم هو ظل الزاوية التى يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ويرمز له بالرمز  $m$  أى أن  $m = \tan \theta$  حيث  $\theta$  هى الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور  $x$ .



مثال أوجد ميل المستقيم الذى يصنع زاوية مقدارها  $30^\circ$  مع الاتجاه الموجب لمحور  $x$ .

الحل

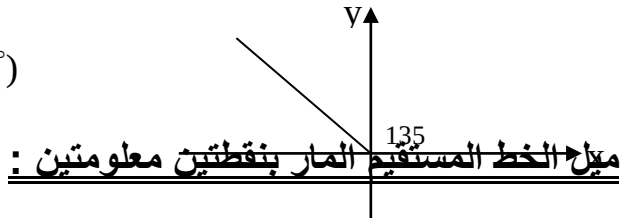
ميل المستقيم  $m$  يعطى من المعادلة :  $m = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$



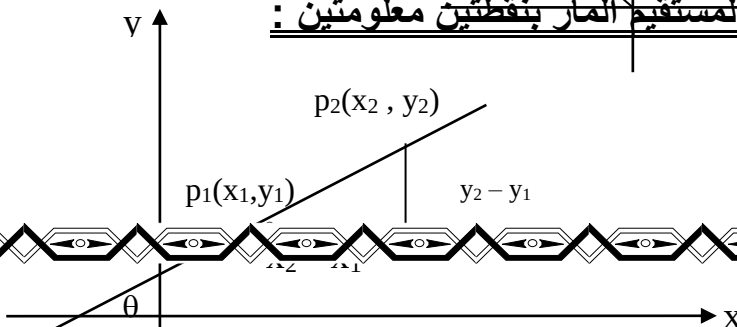
مثال (٢) أوجد ميل المستقيم الذى يصنع زاوية مقدارها  $135^\circ$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

الحل

$$\begin{aligned} m &= \tan 135^\circ \\ &= \tan (90^\circ + 45^\circ) \\ &= -\tan 45^\circ = -1 \end{aligned}$$



ميل الخط المستقيم المار بنقطتين معلومتين :



نفرض أن النقطتين المعلومتين هما  $P_2 (x_2 , y_2) , P_1 (x_1 , y_1)$

$$m = \tan \theta = \frac{P_2 Q}{P_1 Q} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{واضح من الشكل}$$

**مثال (٣)** أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين  $(2, 3) , (5, 4)$

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-3}{5-2} = \frac{1}{3}$$

**مثال (٤)** أوجد ميل المستقيم المار بالنقطتين  $(1, -4) , (0, -3)$ .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4 - (-3)}{1 - 0} = \frac{-1}{1} = -1$$

سوف نستعرض في هذا الجزء بعض صور معادلات الخط المستقيم في

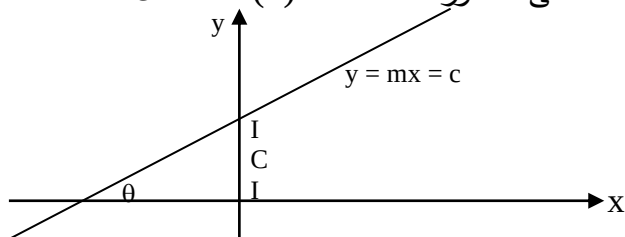
الإحداثيات الكارتيزية المتعامدة

**معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله  $m$  و الجزء المقطوع من**

**محور  $y$ .**

نفرض أن ميل الخط المستقيم هو  $m$  والجزء المقطوع من محور  $y$  هو  $c$

فتكون المعادلة على الصورة (1)  $y = m x + c$



مثال (٥) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله 3 ويقطع جزءاً مقداره 4- من محور  $y$ .

الحل

بالتعويض فى المعادلة (١) عن  $c = -4$ ,  $m = 3$  تكون المعادلة على الصورة  

$$y = 3x - 4$$

مثال (٦) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يصنع زاوية مقدارها  $\frac{\pi}{4}$  مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ويقطع جزءاً مقداره 7 من محور  $y$ .

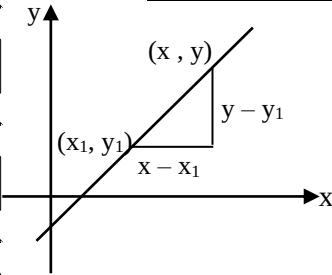
الحل

$$m = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \therefore$$

بالتعويض فى المعادلة (١) عن  $c = 7$ ,  $m = 1$  تكون المعادلة هى  

$$y = x + 7$$

معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله  $m$  ويمر بنقطة معلومة



نفرض أن ميل المستقيم هو  $m$  ويمر بالنقطة  
 المعلومة  $(x_1, y_1)$  من الشكل المقابل نلاحظ  
 أن  $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$  حيث  $(x, y)$  أى نقطة على المستقيم.

المعادلة المطلوبة تكون على الصورة

$$y - y_1 = m (x - x_1) \quad (2)$$

وهى معادلة الخط المستقيم الذى ميله  $m$  ويمر بالنقطة  $(x_1, y_1)$ .

مثال (٧) أوجد معادلة الخط المستقيم الذى ميله  $\frac{3}{4}$  ويمر بالنقطة  $(2, 3)$

الحل

بالتعويض فى المعادلة ( 2 ) عن  $m = \frac{3}{4}$  ،  $y_1 = 3$  ،  $x_1 = 2$

$$y - 3 = \frac{3}{4} (x - 2) , 4y - 12 = 3x - 6$$

نحصل على

$$4y - 3x - 6$$

**مثال ( ٨ )** أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يصنع زاوية مقدارها  $\frac{\pi}{3}$  ويمر بالنقطة ( 3 , 1 )

الحل

$$m = \tan \frac{\pi}{3} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

المعادلة هى  $y - 3 = \sqrt{3} (x - 1)$

$$y = \sqrt{3} x + 3 - \sqrt{3}$$

أى

**معادلة الخط المستقيم المار بنقطتين معلومتين :**

نفرض أن النقطتين المعلومتين المار بهما الخط المستقيم هما

$$(x_2, y_2) , (x_1, y_1).$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} : \text{ ميل المستقيم } m \text{ المار بالنقطتين يعطى من :}$$

باستخدام المعادلة (2) تكون معادلة الخط المستقيم بمعلومية الميل  $m$  ويمر بالنقطة  $(x_1, y_1)$  على الصورة .

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad (3)$$

**مثال (٩) :** أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين  $(2, 4)$  ,  $(6, 5)$

الحل

بالتعويض فى المعادلة (3)

$$y - 4 = \frac{5-4}{6-4} (x - 2) , \quad y - 4 = \frac{1}{2} (x - 2)$$

$$4y - 16 = x - 2$$

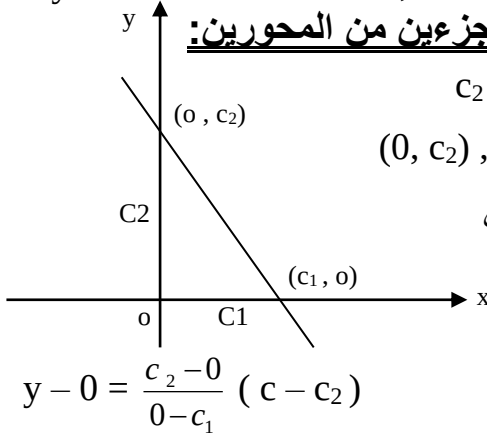
$$, \quad 4y - x - 14 = 0$$

معادلة الخط المستقيم الذي يقطع جزءين من المحورين:

نفرض أن الجزئين المقطوعين هما  $C_1, C_2$

∴ المستقيم يمر بالنقطتين  $(0, C_2), (C_1, 0)$

بالتعويض في المعادلة (3) نحصل على



$$y - 0 = \frac{C_2 - 0}{0 - C_1} (C - C_2)$$

$$C_1 y + C_2 x = C_1 C_2$$

ومنها

$$(4) \quad \frac{x}{C_1} + \frac{y}{C_2} = 1 \text{ . المعادلة على } C_1 C_2 \text{ نحصل على}$$

مثال ( ١٠ ) :- أوجد معادلة الخط المستقيم الذي يقطع من محور السينات

4 وحدات ومن محور الصادات 3 وحدات .

الحل

بالتعويض في المعادلة (4) عن  $C_1 = 4, C_2 = 3$

$$\text{نحصل على} \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1 \quad , \quad 3x + 4y = 12 \therefore$$

مثال ( ١١ ) :- أوجد الأجزاء المقطوعة من المحورين  $x, y$  بواسطة المستقيم

$$5x - 3y = 15$$

الحل

نضع معادلة المستقيم على الصورة (4) وذلك بقسمة المعادلة على 15 نحصل

$$\text{على} \quad \frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1 \text{ ومنها نحصل على}$$

$$\therefore C_1 = 3, C_2 = -5$$

**ملحوظة : ١-** شرط توازي خطين مستقيمين هو أن يكون ميل كل منهما

$$\text{يساوى الآخر . أى أن } m_1 = m_2$$

**٢-** شرط تعامد خطين مستقيمين هو أن يكون حاصل ضرب الميلين يساوى

$$\text{سالب واحد أى أن } m_1 m_2 = -1$$

**مثال ( ١٢ ) :** أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة ( -1 ,

$$3) \text{ ويوازي المستقيم } y = 2x - 11 .$$

**الحل**

ميل المستقيم المعلوم = 2 ، ∴ المستقيمان متوازيان لذا فميلاهما متساويان

$$\therefore \text{ ميل المستقيم المطلوب } = 2$$

$$y - 3 = 2 ( x + 1 )$$

باستخدام العلاقة (2) نحصل على

$$y - 3 = 2x + 2$$

$$y - 2x - 5 = 0$$

**مثال ( ١٣ ) :** أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (-2, -3)

$$\text{وعمودى على المستقيم الذى معادلته } y = 4x + 11$$

**الحل**

شرط تعامد مستقيمين ميلاهما  $m_2, m_1$  هو  $m_2, m_1 = -1$

نفرض أن ميل المستقيم المطلوب هو  $m_2$  وحيث أن  $m_1 = 4$  فإن

$$4 m_2 = -1 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{4}$$

باستخدام العلاقة (2) تكون معادلة المستقيم هى

$$y + 3 = -\frac{1}{4} ( x + 2 ) , \quad 4y + 12 = -x - 2$$

$$x + 4y = -14 \quad \text{أى أن المعادلة هى}$$

الزاوية بين مستقيمين معلومين

إذا كان ميلاً المستقيمين المعلومين هما  $m_1$  ,  $m_2$  فإن الزاوية  $\theta$  بين

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \quad (5) \quad \text{المستقيمين نعطي من العلاقة}$$

**مثال (١٤)** أوجد الزاوية بين المستقيمين  $y = 2x - 3$  ,  $y = -3x + 2$

**الحل**

حيث أن  $m_1 = 2$  ,  $m_2 = -3$

$$\therefore \tan \theta = \frac{-3-2}{1+2(-3)} = \frac{-5}{-5} = 1 \quad , \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

**ملحوظة** إذا كانت معادلتا المستقيمين معطاة على الصورة :

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \quad , \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

فإن الزاوية بين المستقيمين تعطى من العلاقة

$$\tan \theta = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_1 b_2} \quad (6)$$

ومنها نحصل على شرط التوازي وهو  $a_1 b_2 = a_2 b_1$

وشرط التعامد هو  $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$

**مثال (١٥)** أوجد الزاوية بين المستقيمين  $4x + 5y - 1 = 0$  ,  $2x - 3y + 3 = 0$

**الحل**

حيث أن  $b_2 = 5$  ,  $a_2 = 4$  ,  $b_1 = -3$  ,  $a_1 = 2$

بالتعويض في العلاقة (6) نحصل على

$$\tan \theta = \frac{2(5) - 4(-3)}{2(4) + (-3)(5)} = \frac{22}{-7} \quad \therefore \theta = \tan^{-1} \left( \frac{-22}{7} \right)$$

أى الزاوية التى ظلها يساوى  $\frac{-22}{7}$

طول العمود النازل من النقطتين على مستقيم

إذا كانت النقطة هي  $(x_1, y_1)$  والمستقيم هو  $ax + by + c = 0$  فإن طول العمود النازل من النقطة  $(x_1, y_1)$  على هذا المستقيم يكون على الصورة.

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

### تمارين

[١] أوجد معادلة الخط المستقيم في الحالات التالية :

أ- الذي ميله 2- ويمر بالنقطة  $(1, -4)$

ب- يصنع زاوية مقدارها  $\frac{\pi}{6}$  مع الاتجاه الموجب لمحور  $Ox$  ويقطع

جزءاً مقداره 3 من محور  $y$ .

ج - يمر بالنقطتين  $(1, 2)$  ,  $(-1, 4)$

د - يقطع أجزاء 3, 4 من المحورين  $Ox, Oy$

هـ - يوازي محور  $x$  ويمر بالنقطة  $(2, 4)$

و - عمودى على محور  $x$  ويمر بالنقطة  $(-2, 5)$

[٢] أوجد معادلة الخط المستقيم الذى يوازي المستقيم  $2y = 4x - 5$  ويمر

بالنقطة  $(-2, 3)$

[٣] أوجد معادلة الخط المستقيم العمودى على المستقيم  $3y - 4x + 11 = 0$

ويمر بالنقطة  $(-2, 3)$

[٤] أوجد الزاوية بين المستقيمين

$$x + 5y + 6 = 0 \quad , \quad 2x - 3y - 3 = 0$$

[٥] أوجد بعد النقطة  $(3, 2)$  عن المستقيم

$$4x - 3y + 7 = 0$$

၁၇

ပုဂံပုဂံပုဂံပုဂံ

## الباب الثالث

### المعادلة التى تمثل خطين مستقيمين

#### ١- الخطان المستقيمان اللذان يمران بنقطة الأصل .

تعتبر المعادلة (1)  $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$  والتي تمثل محلاً هندسياً

معيناً يمكن كتابة المعادلة على الصورة. (2)  $(2x - y)(x - y) = 0$

ومن الواضح أن المعادلة (2) ومن ثم (1) تتحقق بجميع قيم  $x, y$  والتي تحقق

$2x - y = 0$  أو بعبارة أخرى جميع النقط على المستقيم  $2x - y = 0$  تقع على

المحل الهندسى الذى تمثله المعادلة (1) وبالمثل جميع النقط على المستقيم  $x - y = 0$

$y = 0$  تقع على المحل الهندسى الذى تمثله المعادلة (١) يستنتج من ذلك أن

المعادلة (1) تمثل الخطين المستقيمين  $2x - y = 0$  ,  $x - y = 0$  ويمر كل

منهما بنقطة الأصل . لذلك تمثل أي معادلة على الصورة السابقة خطين

مستقيمين إذا أمكن تحليل الطرف الأيسر إلى عاملين حقيقيين من الدرجة الأولى

والصورة العامة للمعادلة المعطاة هى:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \quad (3)$$

وهي متجانسة من الدرجة الثانية فى  $x, y$  وسنبحث الآن بإذن الله تعالى عن

الشرط اللازم توفره حتى تمثل هذه المعادلة خطين يمران بنقطة الأصل .

سنفرض أن  $b \neq 0$  مستقيمين إذا كانت  $b = 0$

$$\text{فإن } ax^2 + 2hxy = 0 \quad \text{أى } x(ax + 2hy) = 0$$

وهى تمثل المستقيمين  $ax + 2hy = 0$  ,  $x = 0$  وكل منهما يمر بنقطة

الأصل. وبالرجوع إلى الحالة التى فيها  $b \neq 0$  بقسمة المعادلة (3) على  $b$

$$(4) \quad y^2 + \frac{2h}{b}xy + \frac{a}{b}x^2 = 0 \quad \text{ينتج أن}$$

فإذا مثلت المعادلة (3) مستقيمين يمران بنقطة الأصل فيجب أن يأخذ الطرف الأيسر للمعادلة (4) الصورة  $(y - m_1 x)(y - m_2 x)$  وبذلك يكون كتابتها على الصورة (5)  $y^2 + \frac{2h}{b}xy + \frac{a}{b}x^2 = (y - m_1 x)(y - m_2 x)$

وبقسمة (5) على  $x^2$  ووضع  $\frac{y}{x} = m$  ينتج أن

$$m^2 + \frac{2h}{b}m + \frac{a}{b} = (m - m_1)(m - m_2) = 0$$

$$\therefore m_1 = \frac{-h + \sqrt{h^2 - ab}}{b}, m_2 = \frac{-h - \sqrt{h^2 - ab}}{b}$$

$$m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b}, m_1 m_2 = \frac{a}{b}$$

ويكون جذرا المعادلة حقيقيين ومختلفين إذا كان  $h^2 - ab > 0$  وهو الشرط اللازم لكي تمثل المعادلة خطين مستقيمين .

ويكون الجذران متساويين إذا كان  $h^2 - ab = 0$  واحدا هو  $ax + hy = 0$  ويقال في بعض الأحيان أنها تمثل مستقيمين منطبقين .

وفي المسائل العددية يمكن تحليل الطرف الأيسر في المعادلة (3) إلى عاملين من الدرجة الأولى لإيجاد معادلة كل من المستقيمين أو باستعمال قانون معادلات الدرجة الثانية بشرط أن تكون  $h^2 = ab > 0$  أما إذا كانت  $h^2 - ab < 0$  فإنه يمكن كتابة المعادلة  $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$  على الصورة .  $(ax + hy)^2 + (ab - h^2)y^2 = 0$

وذلك بضرب كل من طرفي المعادلة في  $a$  (بفرض أن  $a \neq 0$ ) ونظراً لأن الطرف الأيسر يحتوى على مجموع كميتين موجبين فيجب أن تكون كل من الكميتين تساوى صفراً حتى يكون مجموعها يساوى صفراً.

$$\therefore ax + hy = 0, \quad (ab - h^2) y^2 = 0$$

ولكن  $ab - h^2 \neq 0$  لأنه من الفرض  $h^2 < ab$  إذاً  $y = 0$ .

كذلك  $ax + hy = 0, a \neq 0$ , وينتج أن  $x = 0$

أى تتحقق المعادلة إذا كان  $x = y = 0$  أى أن نقطة الأصل هى النقطة الحقيقية الوحيدة التى تحقق المعادلة فى هذه الحالة .

## ٢- الزاوية المحصورة بين المستقيمين اللذين تمثلهما المعادلة

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$

إذا مثلت المعادلة خطين مستقيمين أى إذا كان  $h^2 > ab$  فإنه حسب البند

السابق تكون معادلتا المستقيمين هما  $y - m_1x = 0, y - m_2x = 0$

$$m_1 = \frac{-h + \sqrt{h^2 - ab}}{b}, \quad m_2 = \frac{-h - \sqrt{h^2 - ab}}{b} \quad \text{حيث}$$

فإذا كانت  $\theta$  هى إحدى الزاويتين بين المستقيمين فإن:

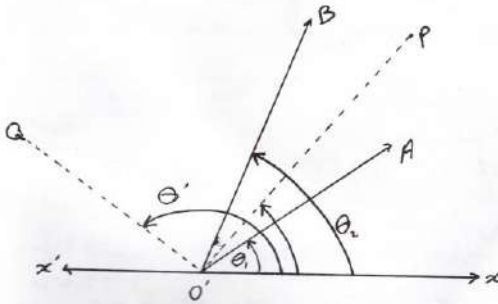
$$\tan \theta = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}, = \frac{\pm \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{b}}{1 + a/b}, = \frac{\pm 2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}$$

إذا كانت  $a + b = 0$  يكون المستقيمان متعامدين وتكون  $h^2 - ab$  موجبة فى

هذه الحالة ويتحقق أوتوماتيكياً شرط تمثيل المعادلة لخطين مستقيمين

## ٣- معادلة منصفى الزاويتين المحصورتين بين المستقيمين اللذين

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \quad \text{تمثلهما المعادلة}$$



نفرض أن  $oA$  ,  $oB$  هما المستقيمان

$$y - m_1 x = 0 , y - m_2 x = 0$$

الذين يمثلهما المعادلة  $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$

$$\therefore ax^2 + 2hxy + by^2 = b(y - m_1 x)(y - m_2 x)$$

$$\therefore m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b} , m_1 m_2 = \frac{a}{b}$$

نفرض أن  $\theta_1, \theta_2$  هما الزاويتان اللتان يصنعهما المستقيمان  $oB$

$oA$  , مع اتجاه محور  $x$  كما هو مبين بالشكل السابق أى أن

$$\tan \theta_1 = m_1 , \tan \theta_2 = m_2$$

نفرض أن  $op, oQ$  هما منصفتا الزاويتين بين  $oB, oA$  ونفرض أن  $\theta, \theta'$

هما علي الترتيب الزاويتان اللتان يصنعهما  $op, oQ$  مع الاتجاه الموجب

لمحور  $x$  .

$$\theta = \angle(xop) = \angle(xoA) + \frac{1}{2} \angle(AoB) , \theta = \theta_1 + \frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_1)$$

$$\theta = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2) , 2\theta = \theta_1 + \theta_2$$

ونظرا لان المنصفين  $op, oQ$  متعامدين فان  $\theta' = 90^\circ + \theta$

$$2\theta' = 180^\circ + 2\theta - 180^\circ \theta_1 \theta_2$$

$$\tan \theta = \tan (180^\circ + \theta)$$

ولكن

$$\tan 2\theta = \tan 2\theta' = \tan (\theta_1 + \theta_2)$$

ينتج أن

لذلك إذا مثلت  $\theta$  زاوية ميل أحد المنصفين مع محور السينات فان

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{\tan \theta_1 + \tan \theta_2}{1 - \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2}$$

$$m_1 m_2 = \frac{a}{b} , m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b}$$

ولكن

$$\therefore \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{-2h}{b-a}$$

فإذا كانت (x,y) هي نقطة على أحد المنصفين فإن  $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$$\frac{2 \frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}} = \frac{-2h}{b-a}, \therefore \frac{x^2 - y^2}{a-b} = \frac{xy}{h}$$

وهي المعادلة المشتركة للمنصفين ويلاحظ أنها تحقق شرط تعامد المستقيمين لأن معامل  $x^2$  معامل  $y^2$  يساوى صفرًا وهذا متوقع لأن منصفى الزاويتين الداخلة والخارجة يتعامدان على بعضهما .

مثال (١) أوجد معادلة كل من المستقيمين اللذين تمثلهما المعادلة  $3x^2 + 4xy - 5y^2 = 0$  وأوجد ظل الزاوية بينهما .

الحل

$$\therefore 3x^2 + 4xy - 5y^2 = 0$$

بالقسمة على  $x^2$  ووضع  $\frac{y}{x} = m$  ينتج أن  $5m^2 - 4m - 3 = 0$

$$\therefore m = \frac{4 \pm \sqrt{16+60}}{10} = \frac{1}{5}(2 \pm \sqrt{19}) \therefore m_1 = \frac{1}{5}(2 + \sqrt{19}), m_2 = \frac{1}{5}(2 - \sqrt{19})$$

وتكون معادلة المستقيم الأول هي  $y = m_1 x$  ومعادلة المستقيم الثاني هي  $y = m_2 x$  ويعطى ظل الزاوية  $\theta$  المحصورة بين المستقيمين من القانون

$$\tan \theta = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \pm \frac{\frac{2}{5}\sqrt{19}}{1 + \frac{1}{25}(4-19)} = \pm \sqrt{19}$$

ويمكن إيجاد  $\theta$  باستعمال القانون  $\tan \theta = \pm \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}$

$$= \pm \frac{2\sqrt{4+15}}{3-5} = \sqrt{19}$$

مثال (٢) أوجد معادلة المستقيمين اللذين يمران بنقطة الأصل ويتعامدان على

المستقيمين اللذين تمثلهما المعادلة  $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$

الحل

إذا كانت  $(x, y)$  نقطة ما على أحد المستقيمين المطلوبين فإن النقطة  $(-ky, kx)$

أو النقطة  $(ky, -kx)$  تقع على أحد المستقيمين المطلوبين وذلك من شرط

التعامد فإذا وقعت النقطة  $(-ky, kx)$  على أحد المستقيمين المطلوبين فيجب

أن تحقق المعادلة  $a x^2 + 2hxy + by^2 = 0$

$$\therefore a (-ky)^2 + 2h (-ky) + b (kx)^2 = 0$$

$$\therefore a k^2 y^2 - 2h k^2 xy + b k^2 x^2 = 0$$

وبالقسمة على  $k^2$  وترتيب الحدود ينتج أن  $b x^2 - 2hxy + a y^2 = 0$

وهي المعادلة المشتركة للمستقيمين المطلوبين .

مثال (٣) أوجد العلاقة بين  $a, h, b$  حتى يكون ميل أحد المستقيمين اللذين

تمثلهما المعادلة  $a x^2 + 2hxy + by^2 = 0$  ثلاثة أمثال ميل الآخر .

الحل

بالقسمة على  $bx^2$  ووضع  $m = \frac{y}{x}$  ينتج أن  $m^2 + \frac{2h}{b} m + \frac{a}{b} = 0$

وهذه معادلة من الدرجة الثانية في  $m$  جذورها  $3m_1, m_2$

$$\therefore 3m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b} \quad \text{or} \quad 4m_1 = \frac{-2h}{b} \quad (1)$$

$$m_1 \cdot 3m_1 = \frac{a}{b} \quad \text{or} \quad 3m_1^2 = \frac{a}{b} \quad (2)$$

$$\frac{h^2}{4b^2} = \frac{a}{b}$$

$$\therefore 3h^2 = 4ab$$

نحذف  $m_1$  من (1), (2) نجد أن

٤ - الخطان المستقيمان بوجه عام

إذا أمكن تحليل المقدار  $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$

إلى عاملين من الدرجة الأولى بصورة

$$L_2 x + m_2 y + n_2, \quad L_1 x + m_1 y + n_1$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad (1) \quad \text{فإن المعادلة}$$

تمثل الخطين المستقيمين  $L_1 x + m_1 y + n_1 = 0, L_2 x + m_2 y + n_2 = 0$

وسنبحث الآن إن شاء الله تعالى عن الشرط اللازم توفره حتى تمثل المعادلة (١)

خطين مستقيمين بفرض أن المستقيمين غير متوازيين ويتقاطعان في نقطة  $O$

$(x_0, y_0)$  نختار  $O' x', O' y'$  يمران بنقطة التقاطع  $O$  ويوازيان المحورين

الأصليين وينتج أن  $x = x' + x_0, y = y_0 + y'$

وبالتعويض في المعادلة (١) ينتج أن

$$a(x' + x_0)^2 + 2h(x' + x_0)(y' + y_0) + b(y' + y_0)^2 + 2g(x' + x_0) + 2f(y' + y_0) + c = 0$$

$$\therefore ax'^2 + 2hx'y' + by'^2 + 2x'(ax_0 + hy_0 + g) + 2y'(hx_0 + by_0 + f) + (ax_0^2 + 2hx_0y_0 + by_0^2 + 2gx_0 + 2fy_0 + c) = 0 \quad (2)$$

فإذا مثلت المعادلة (١) خطين مستقيمين فيجب أن تمثل المعادلة (2) خطين

مستقيمين يمران بنقطة الأصل الجديدة أى يجب أن تكون متجانسة في  $x', y'$

وينتج أن

$$ax_0 + hy_0 + g = 0 \quad (3)$$

$$hx_0 + by_0 + f = 0 \quad (4)$$

$$ax_0^2 + 2hx_0y_0 + by_0^2 + 2gx_0 + 2fy_0 + c = 0 \quad (5)$$

ولتبسيط المعادلة (4) مضروبة في  $y_0$  وينتج أن  $gx_0 + fy_0 + c = 0$

(3), (4), (6) ثلاث معادلات في  $y_0, x_0$  وتكون هذه المعادلة متوافقة

(وبذلك تمثل المعادلة (2) ومن ثم المعادلة (1) خطين مستقيمين) إذا كان

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$$

وهو الشرط اللازم توفره حتى تمثل المعادلة (1) خطين مستقيمين وبفك المحدد

$$2 b c + 2 f g h - a f^2 - b g^2 - c h^2 = 0 \quad \text{ينتج أن}$$

$$a x^2 + 2 h x y + b y^2 = 0 \quad \text{إلى (2) وتؤول المعادلة}$$

وتعطى الزاوية بين هذين المستقيمين وهو نفس الزاوية بين المستقيمين اللذين

$$\tan \theta = \frac{\pm 2 \sqrt{h^2 - a b}}{a + b} \quad \text{تمثلها (1) من العلاقة}$$

ويكون المستقيمان متعامدان إذا كان  $a + b = 0$  وإذا كان  $h^2 - ab = 0$

يكون المستقيمين منطبقين أو متوازيين وبفك المحدد (7) باستعمال الصف

$$g (h f - b g) - f (a f - h g) + c (a b - h^2) = 0 \quad \text{الثالث ينتج أن :}$$

فإذا كان المستقيمان متوازيين فإن  $ab - h^2 = 0$  وينتج أن

$$2 f g h - a f^2 - b g^2 = 0$$

وبالضرب في  $a$  ( بفرض أن  $a \neq 0$  ) ووضع  $h^2 = ab$  ينتج أن

$$a^2 f^2 - 2 a f g h + h^2 g^2 = 0, \therefore (a f - h g)^2 = 0 \quad \text{or} \quad a f - h g = 0$$

لذلك إذا مثلت المعادلة (1) خطين مستقيمين متوازيين فإن :

$$h^2 - ab = af - gh = 0$$

ويمكن إيجاد البعد العمودى بين مثل هذين المستقيمين المتوازيين كما يأتى :

نضرب المعادلة (1) في  $a$  ونحصل على

$$a^2 x^2 + 2 a h x y + a b y^2 + 2 a g x + 2 a f y + a c = 0$$

$$a^2 x^2 + 2 a h x y + h^2 y^2 + 2 a g x + 2 g x + 2 g x + 2 g h y + a c = 0 \quad \text{أى}$$

وبالتحليل ينتج أن  $(ax + hy + c_1)(ax + by + c_2) = 0$

$$c_1 + c_2 = 2g, \quad c_1 c_2 = ac$$

فإذا كانت  $(X, Y)$  نقطة خارج المنطقة بين المستقيمين المتوازيين فإن طولى العمودين الساقطين من  $(X, Y)$  على هذين المستقيمين هما

$$\frac{aX + hY + c_1}{\sqrt{a^2 + h^2}}, \quad \frac{ax + hY + c_2}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

ويكون البعد العمودى بين هذين المستقيمين يساوى الفرق بين طولى هذين العمودين أى

$$\frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{\sqrt{(c_1 + c_2)^2 - c_1 c_2}}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{2\sqrt{g^2 - ac}}{\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{2\sqrt{g^2 - ac}}{\sqrt{a^2 + ab}}$$

فإذا كانت  $g^2 - ac = 0$  يكون المستقيمان منطبقين

مثال (٤) أوجد كل من  $a, c$  حتى تمثل المعادلة

$$ax^2 + 3xy - 2y^2 - x + 3y + c = 0$$

خطين مستقيمين متعامدين .

الحل

إذا مثلت المعادلة خطين مستقيمين متعامدين يجب أن يكون معامل  $x^2$

معامل  $y^2$  يساوى صفر.  $\therefore a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

وتؤول المعادلة إلى  $2x^2 + 3xy - 2y^2 - x + 3y + c = 0$

ولكى تمثل هذه المعادلة خطين مستقيمين يجب أن يكون

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0 \therefore 2(-2) \cdot (c + 2) \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \frac{3}{2}$$

$$-2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - (-2)\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - c\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow c = -1$$

تمارين

[١] أوجد الزاوية بين المستقيمين اللذين تمثلهما المعادلة  $6x^2 - xy - y^2 = 0$

وأوجد أيضاً المعادلة المشتركة لمنصفى الزاويتين المحصورين بينهما.

[٢] أثبت أن المعادلة  $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 18x + 12y + 9 = 0$

تمثل خطين مستقيمين منطبقين وأوجد معادلتيهما .

[٣] أوجد قيمة  $c$  حتى تمثل المعادلة

$$8x^2 - 6xy + y^2 - 10x + 4y + c = 0$$

خطين مستقيمين . أوجد معادلة كل مستقيم . ونقطة تقاطعهما والمعادلة

المشتركة لمنصفى الزاويتين المحصورين بين المستقيمين .

[٤] أثبت أن المعادلة  $x^2 - 6xy + 9y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$

تمثل مستقيمين منطبقين وأن المعادلة

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 16 = 0$$

تمثل مستقيمين متوازيين وأوجد البعد العمودى بينهما .

(i)

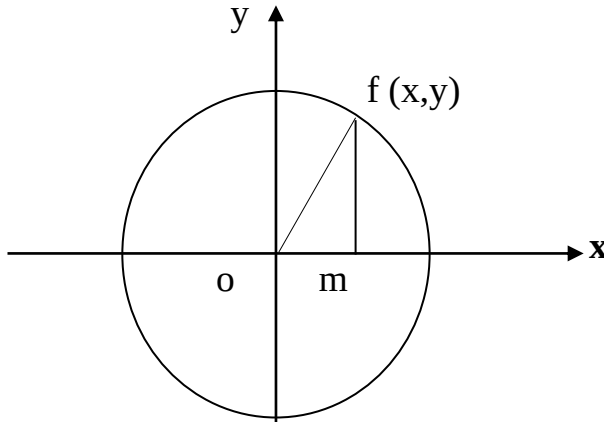


## الباب الرابع

## الدائرة

الدائرة هي المحل الهندسى لنقطة تتحرك بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة تسمى المركز مساوياً مقداراً ثابتاً يسمى نصف قطر الدائرة .

١- إيجاد معادلة الدائرة التى مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a.



إذا كانت O هي المركز وكان نصف قطر الدائرة هو a وكانت f أى نقطة (x,y) على الدائرة وكان fm عمودياً على محور السينات فإن fm هو الإحداثى الصادى للنقطة f . ويكون لجميع أوضاع النقطة f على الدائرة .

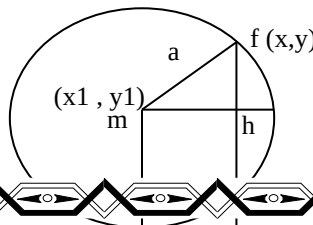
$$om^2 + mf^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad (1) \quad \text{أى}$$

وهى معادلة الدائرة المطلوبة

إيجاد معادلة الدائرة التى مركزها النقطة (x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>) ونصف قطرها

a



$$\overline{mh}^2 + \overline{fh}^2 = \overline{fm}^2 \quad \text{وبما أن}$$

فتكون معادلة الدائرة المطلوبة هي

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = a^2 \quad (2)$$

فمثلاً معادلة الدائرة التي مركزها هي النقطة  $(-2, 3)$  ونصف قطرها 7 هي

$$x^2 + y^2 + 4x = 6y - 36 = 0 \quad \text{ومنها} \quad (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 49$$

وإذا كانت  $m$  هي نقطة الأصل أي  $(0, 0)$  فإننا نحصل على المعادلة

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{السابقة في البند السابق وهي}$$

مثال (١) أوجد معادلة الدائرة التي تقع نقطة الأصل على محيطها ويكون محور السينات قطعاً فيها.

**الحل**

في هذه الحالة يكون المركز هو  $(a, 0)$  حيث  $a$  هو نصف قطر الدائرة

$$\text{وتصبح المعادلة (2) } x^2 + y^2 - 2ax = 0, \quad (x - a)^2 + (y - 0)^2 = a^2$$

مثال (٢) أوجد معادلة الدائرة التي تماس محور السينات ونصف قطرها  $a$ .

**الحل**

في هذه الحالة يكون المركز هو  $(x_1, a)$  وتكون معادلة الدائرة المطلوبة هي

$$(x - x_1)^2 + (y - a)^2 = a^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x_1x - 2ay + x_1^2 = 0$$

بالتفك

مثال (٣) أوجد معادلة الدائرة التي نصف قطرها  $a$  وتسمى محوري الإحداثيات .

الحل

المركز هو  $(a, a)$  ونصف القطر هو  $a$  وتكون المعادلة  $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$  أى  $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$

مثال (٤) أثبت أن المعادلة  $x^2 + y^2 + 2Lx + 2ky + c = 0$  تمثل دائرة مركزها هو النقطة  $(-L, -k)$  ونصف قطرها هو  $\sqrt{L^2 + k^2 - c}$ .

الحل

يمكن كتابة المعادلة  $x^2 + y^2 + 2Lx + 2ky + c = 0$  (3)

على الصورة  $(x^2 + 2Lx + L^2) + (y^2 + 2ky + k^2) = L^2 + k^2 - c$

أى  $(x + L)^2 + (y + k)^2 = L^2 + k^2 - c$

وبمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة (2) بالبند السابق نستنتج أن المعادلة

$$x^2 + y^2 + 2Lx + 2ky + c = 0$$

تمثل دائرة مركزها هو النقطة  $(-L, -k)$  ونصف قطرها هو  $\sqrt{L^2 + k^2 - c}$

وتكون هذه الدائرة حقيقية أو تخيلية حسب كون

$$L^2 + k^2 - c > 0 \text{ or } L^2 + k^2 - c < 0$$

أما إذا كانت الكمية  $L^2 + k^2 - c = 0$  فإن الدائرة تصبح نقطة وتسمى بدائرة النقطة.

من المعادلة (1) نجد أن شرط تمثيل المعادلة العامة ذات الدرجة الثانية فى

المجهولين  $x, y$  لدائرة هو معامل  $x^2 =$  معامل  $y^2$  وأيضاً معامل  $xy = 0$

وواضح أن من المعادلة (3) أنه يلزمنا ثلاث شروط هندسية لتعيين الكميات

$L, K, c$  مثل ثلاث نقط معلومة أو المركز ونصف القطر كما يتضح من

الأمثلة الآتية.

مثال (٦) أوجد معادلة الدائرة المارة بالثلاث نقط (2, -9), (19, 8), (20, 3)

الحل

نفرض أن معادلة الدائرة هي

$$x^2 + y^2 + 2Lx + 2ky + c = 0 \quad (1)$$

وبتعويض عن النقط الثلاث كل على حده نحصل على الثلاث معادلات الآتية

$$40L + 6k + c = -408 \quad (2) \quad \text{لتعيين الكميات } c, K, L$$

$$38L + 16k + c = 425 \quad (3) \quad 4L - 18k + c = -85 \quad (4)$$

وبطرح المعادلتين (3) , (4) ينتج أن

$$34L + 34k = -340 \quad , \quad \therefore L + k = -10 \quad (5)$$

وبطرح المعادلتين 2 , 3 نجد أن

$$2L - 10k = 16 \quad , \quad \therefore L - 5k = 8 \quad (6)$$

وبحل (5) , (6) كمعادلتين في المجهولين L , k نجد أن  $L = -7, k = -3$

وبالتعويض عن قيمتي L , k في (2) مثلاً ينتج أن  $c = -111$  وبالتعويض

في عن قيم c , k , L تكون معادلة الدائرة المطلوبة هي

$$x^2 + y^2 - 14x - 6y - 111 = 0 \quad (7)$$

وهي دائرة مركزها (7, 3) ونصف قطرها  $\sqrt{7^2 + 3^2 + 111} = 13$

مثال (٧) أوجد معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات عند النقطة (0, 4)

وتقطع من محور السينات طولاً يساوى 6 .

الحل

نفرض أن معادلة الدائرة هي (1)  $x^2 + y^2 + 2Lx + 2ky + c = 0$

وبوضع  $x = 0$  نحصل على معادلة من الدرجة الثانية في y يكون لها جذران

هما الإحداثيات الصادية لنقطتي تقاطع الدائرة مع محور الصادات أي

$$y^2 + 2ky + c = 0 \quad (2)$$

وهذه المعادلة يجب أن تكون على الصورة  $(y - 4)^2$  لأن الدائرة تمس محور  
الصادات أى تقطعه فى نقطتين منطقتين إذن  $(3) \quad y^2 - 8y + 16 = 0$

بمقارنة المعادلتين (2) , (3) نستنتج أن :  $C = 16$  ,  $K = -4$

وبالتعويض عن  $c$  ,  $k$  فى (1) نجد أن المعادلة المطلوبة هى

$$x^2 + y^2 + 2Lx - 8y + 16 = 0 \quad (4)$$

وبوضع  $y = 0$  فى المعادلة السابقة نحصل على معادلة من الدرجة الثانية فى  
 $x$  يكون جذران هما الإحداثيات السينية لنقطتى تقاطع الدائرة (4) مع محور

$$x^2 + 2Lx + 16 = 0 \quad (5) \quad \text{السينات أى}$$

ولحل هذه المعادلة كمعادلة من الدرجة الثانية فى  $x$  نجد أن الجذرين هما

$$x_1 = -L + \sqrt{L^2 - 16} , \quad x_2 = -L - \sqrt{L^2 - 16}$$

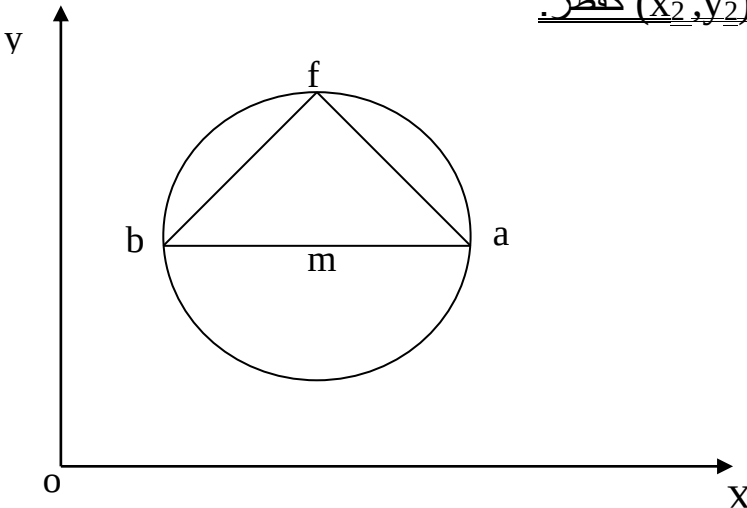
$$x_1 - x_2 = 6 \quad \text{ولكن}$$

$$\therefore 2\sqrt{L^2 - 16} = 6 \Rightarrow L = \pm 5$$

أى أنه يوجد دائرتان تحققان الشروط السابقة وهما

$$x^2 + y^2 \pm 10x - 8y + 16 = 0$$

٣- معادلة الدائرة المرسومة على المستقيم الواصل بين النقطتين  
 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  كقطر.



نفرض أن  $m$  مركز الدائرة وأن  $a, b$  هو القطر حيث  $a, b$  هما النقطتين  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  وأن  $f$  هي النقطة  $(x, y)$  نقطة ما على الدائرة .  
 لجميع أوضاع  $f$  على الدائرة تكون الزاوية  $(a f b) < 180^\circ$  قائمة .  
 $\therefore$  المستقيمان  $af, bf$  متعامدان. أى أن حاصل ضرب ميلهما يساوى -1

$$\therefore \left( \frac{y - y_1}{x - x_1} \right) \left( \frac{y - y_2}{x - x_2} \right) = -1$$

وتكون معادلة الدائرة المطلوبة هي

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0 \quad (1)$$

وهي دائرة مركزها  $\left( \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2} \right)$  أى منتصف  $a, b$

مثال (٨) أوجد : أولاً : معادلة الدائرة التي تمر بالثلاث نقط الآتية  $(0,0), (6,8), (2,-4)$  .

ثانياً : معادلة الدائرة المرسومة على المستقيم الواصل بين النقطتين  $(6, -1), (1,4)$  كقطر ثم أثبت أن الدائرتين متماستان من الداخل .

### الحل

أولاً : نفرض أن معادلة الدائرة هي  $x^2 + y^2 + 2Lx + 2ky + c = 0$

حيث أن الدائرة تمر بنقط الأصل  $c = 0$  .  $\therefore$  وتصبح الدائرة

$$x^2 + y^2 + 2Lx + 2ky = 0$$

وبالتعويض بالنقطتين  $(2,-4), (6,8)$  على الترتيب نجد أن

$$20 + 4L + 16 = 0 \Rightarrow 5 + L - 2k = 0 \quad (3)$$

$$100 + 12L + 16k = 0 \Rightarrow 25 + 3L + 4k = 0 \quad (4)$$

بحل المعادلتين (3), (4) نجد أن  $L = -7, k = -1$

وتكون الدائرة المطلوبة هي: (5)  $x^2 + y^2 - 14x - 2y = 0$

وهي دائرة مركزها النقطة ( 7 , 1 ) ونصف قطرها  $\sqrt{50}$  .

ثانياً: معادلة الدائرة المرسومة على المستقيم الواصل بين (6, - 1), (1,4) كقطر هي :-  
 $(x - 1)(x - 6) + (y - 4)(y + 1) = 0$

ومنها :-

$$x^2 + y^2 - 7x - 3y + 2 = 0 \quad (7)$$

وهي دائرة مركزها النقطة ( 7/3 , 3/2 ) ونصف قطرها .

$$\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} - 2 = \frac{1}{2} \sqrt{50} \quad (8)$$

من (6) , (8) نجد أن المسافة بين المركزين هي

$$\sqrt{\left(7 - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{50} \quad (9)$$

ومن (6) . (8) نجد أن الفرق بين نصفى القطر الدائرتين هو

$$\sqrt{50} - \frac{1}{2} \sqrt{50} = \frac{1}{2} \sqrt{50} \quad (10)$$

من (9) , (10) نستنتج أن الدائرتين متماستين من الداخل

### تمارين

[١] أوجد معادلة الدائرة التي مركزها ( 2 , 1 ) ونصف قطرها 4 .

[٢] أوجد معادلة الدائرة مركزها ( 3 , -1 ) ونصف قطرها 5 .

[٣] أوجد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط ( 0 , 1 ) , ( 0 , -1 ) , ( 1 , 0 ) .

[٤] أوجد معادلة الدائرة المرسومة على المستقيم الواصل بين النقطتين  
 ( 0 , 2 ) , ( 1 , 4 ) .

[٥] أوجد مركز ونصف قطر الدوائر الآتية :-

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y = 19$$

$$2x^2 + 2y^2 - 4x - 8y = 90$$

$$3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y - 20 = 0$$

ଫାଲ୍‌ଗୁନ ୧୩୫୫

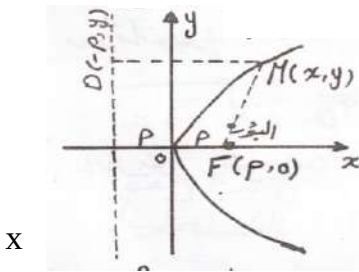
## الباب الخامس

### القطع المكافئ

**تعريف :** القطع المكافئ هو المحل الهندسى لنقطة تتحرك بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة مساوية لبعدها عن مستقيم ثابت لا تقع عليه هذه النقطة وهذا المستقيم الثابت يسمى الدليل للقطع المكافئ والنقطة الثابتة تسمى البؤرة.

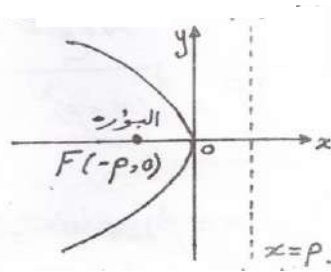
والقطع المكافئ متماثل حول المستقيم المار بالبؤرة والعمودى فى نفس الوقت على الدليل . خط التماثل هذا يسمى محور القطع . محور القطع يقابل القطع فى نقطة تسمى رأس القطع .

وتأخذ معادلة القطع أبسط صورها إذا انطبقت رأس القطع على نقطة الأصل وأنطبق محوره على أحد محاور الإحداثيات والشكل يوضح الأوضاع الأربعة البسيطة لقطع ، حيث  $p > 0$  .



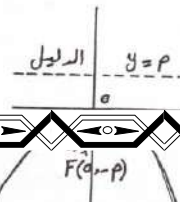
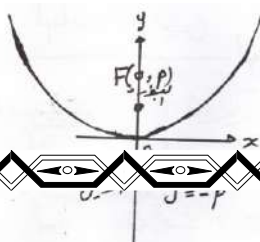
القطع مفتوح جهة اليمين

$$y^2 = 4px$$



القطع مفتوح جهة اليسار

$$y^2 = -4px$$



## شكل (١)

لإيضاح كيف أخذت معادلة القطع الصورة الموضحة بأعلاه نفرض أن  $M(x,y)$  أى نقطه تقع على القطع . ومن تعريف القطع المكافئ فإن .

$$\overline{MF} = \overline{MD} \quad (1)$$

من قانون المسافة بين نقطتين يتضح أن

$$\overline{MF} = \sqrt{(x-p)^2 + y^2} \quad , \quad \overline{MD} = \sqrt{(x+p)^2}$$

بالتربيع والتعويض فى (1) ينتج  $(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$

$$y^2 = 4px \quad \text{ومنها}$$

وهذه معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل مفتوح جهة اليمين . ولاستنتاج باقى المعادلات فى الشكل (1) نتبع نفس الخطوات السابقة.

مثال (١) أوجد البؤرة والدليل للقطع  $y^2 = -8x$

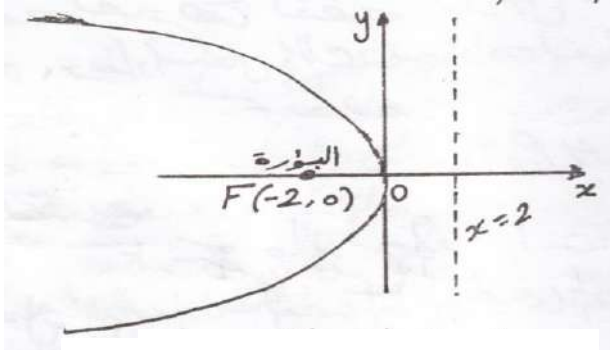
الحل

$$y^2 = 4px \quad \text{معادلة القطع على الصورة}$$

$$p = -2 \quad \text{ومنها } 4p = -8$$

وحيث أن  $y$  ذو قوى زوجية إذن القطع متماثل بالنسبة لمحور السينات.

وبؤرة القطع تقع على محور السينات عند  $(0, -2)$  دليل القطع هو الخط الرأسى الذى معادلته  $x = 2$ .



الأصل .

مثال (٢) أ

ومتماثل بالنسبة لمحور  $y$  ويرتبط بالمعادلة  $x^2 = 4py$ .

الحل

حيث أن القطع متماثل بالنسبة لمحور  $y$  ورأسه عند نقطة الأصل . إذن معادلته تأخذ الصورة  $x^2 = 4py$

وحيث أنه يمر بالنقطة  $(5, 2)$  فهذه النقطة تحقق معادلته ، أى أن

$$5^2 = 4p(2) \Rightarrow 4p = \frac{25}{2}$$

إذن معادلة القطع هى  $x^2 = \frac{25}{2}y$

والآن نعتبر القطع المكافئ الذى رأسه  $(h, k)$  ومحوره موازى لمحور  $y$ . إذا نقلنا نقطه الأصل إلى رأس القطع أى إلى النقطة  $(h, k)$  . وهذه النقطة تصبح هى نقطة الأصل للمحاور الجديدة  $x', y'$  . وبناءً على ذلك. معادلة القطع

$$x'^2 = 4py'$$

$$\text{وبالتعويض عن } x' = x - h \text{ \& } y' = y - k$$

نحصل على معادلة القطع المناظرة فى المحاور  $xy$  وهى

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

وهى معادلة قطع مكافئ رأسه النقطة  $(h, k)$  ومحوره يوازي محور  $y$ .

$$(y - k)^2 = 4p (x - h) \quad \text{وبالمثل تكون}$$

هى معادلة قطع مكافئ رأسه النقطة  $(h, k)$  ومحوره يوازي محور  $x$ .  
 ويلاحظ أن القطع مفتوح فى الاتجاه الموجب لمحور السينات ( جهة اليمين ) .  
 أو الاتجاه السالب لمحور السينات ( جهة اليسار ) تبعاً لإشارة .

$$\text{مثال (٣) ارسم القطع } (y - 3)^2 = 8(x + 4)$$

وعين البؤرة والدليل .

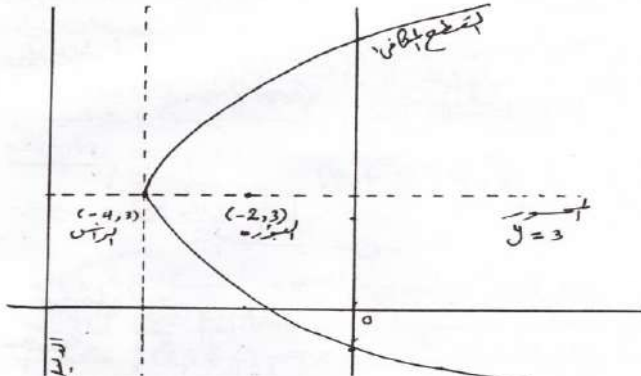
### الحل

$$(y - k)^2 = 4p (x - h) \quad \text{من المعادلة}$$

نجد أن هذه المعادلة تمثل قطع مكافئ رأسه عند النقطة  $(h, k) = (-4, 3)$

ومحور التماثل يوازي محور  $x$ . وحيث أن  $4P = 8$  ومنها  $P = 2$   
 إشارة موجبة إذن القطع مفتوح جهة الاتجاه الموجب لمحور السينات وموقع

البؤرة تبعد بمقدار  $P = 2$  عن الرأس جهة اليمين وإحداثياتها  $(-2, 3)$  .  
 أما الدليل فيبعد عن الرأس بمقدار  $P = 2$  جهة اليسار ويوازي محور  $y$  .  
 ومعادلته إذن هى  $x = -6$  .



مثال (٤) ارسم القطع المكافئ  $y = 6x^2 - 12x + 8$  وعين إحداثيات رأس القطع والبؤرة وكذلك معادلتى المحور والدليل .

### الحل

واضح من المعادلة ظهور قوى  $x$  التربيعية ،  $y$  من الدرجة الأولى .

سوف نعيد كتابة المعادلة فى الصورة .  $(x - 1)^2 = \frac{1}{6} (y - 2)$

واضح أنها معادلة قطع مكافئ يوازى محور  $y$  ورأسه هى النقطة  $(1, 2)$  .

وحيث أن  $4P = \frac{1}{6}$  ومنها  $P = \frac{1}{24}$  وهى موجبة. والبؤرة تقع أعلى الرأس

بمقدار  $P = \frac{1}{24}$  والدليل أسفل الرأس بمقدار  $\frac{1}{24}$  أيضاً.

إذن إحداثى البؤرة هى  $(1, \frac{49}{24})$  ومعادلة الدليل هى  $y = \frac{47}{24}$  .

علي الطالب رسم القطع المكافئ

### تمارين

[١] فى التمارين التالية ارسم القطع مبيناً البؤرة والدليل ورأس القطع :

- $y^2 = -10x$
- $(x - \frac{1}{2})^2 = 2(y - 1)$
- $x^2 - 4x + 2y = 1$
- $y^2 - 6y - 2x + 1 = 0$

සරසවිය

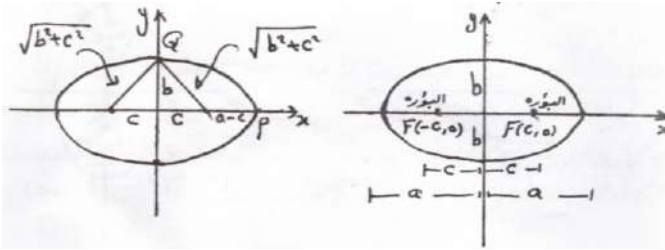
## الباب السادس

## القطع الناقص

تعريف : القطع الناقص هو المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى المستوى بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين يساوى مقدار ثابت .

النقطتين الثابتتين هما البؤرتين . وتسمى النقطة التى فى منتصف الخط الواصل بين البؤرتين بمركز القطع . ونلاحظ أنه إذا انطبقت البؤرتين نحصل على دائرة . والخط المستقيم المار بالبؤرتين ويقابل القطع يسمى بالمحور الأكبر والعمودى عليه ويقابل القطع فى نقطتين ماراً بالمركز يسمى المحور الأصغر .

نفرض أن طول المحور الأكبر يساوى  $2a$  وطول المحور الأصغر  $2b$  والمسافة البؤرتين هى  $2c$  ، أنظر الشكل .



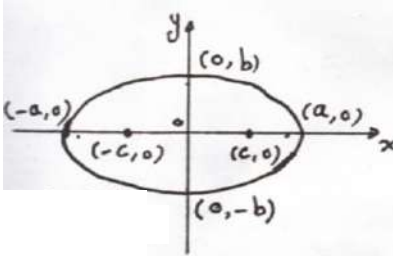
معنى ذلك  $a$  هى نصف المحور الأكبر ،  $b$  نصف المحور الأصغر ، ولإيجاد العلاقة بين  $a$  ,  $b$  ,  $c$  نفترض النقطة  $p$  التى تقع عند نهاية المحور الأكبر والنقطة  $Q$  تقع عند نهاية المحور الأصغر . وحيث أنه كلاً من  $P$  ,  $Q$  يقعان على القطع فإن مجموع المسافات من كل منهما إلى البؤرتين متساوى معبر عن

$$2 \sqrt{b^2 + c^2} = (a - c) + (a + c)$$

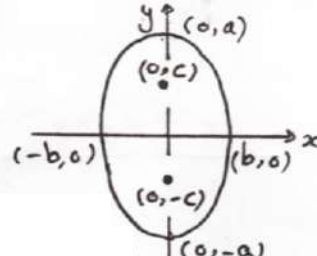
$$a = \sqrt{b^2 + c^2} \quad \text{وبالاختصار نحصل على}$$

ومن هذه العلاقة يتضح أن المسافة من البؤرة إلى نهاية المحور الأصغر تساوي  $a$  ، وأيضاً مجموع المسافات من أى نقطة تقع على القطع إلى البؤرتين تساوي  $2a$ .

معادلة القطع الناقص تأخذ أبسط صورها إذا انطبق مركز القطع على نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات أو محور الصادات وهاتان الحالتان موضحتان بالرسم



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

ولإيضاح كيف حصلنا على المعادلات فى الشكل السابق نفترض أى نقطة تقع على القطع ولتكن  $p(x, y)$  وحيث أن مجموع المسافات من  $p$  إلى البؤرتين يساوى  $2a$  إذن

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

بالتربيع والاختصار

$$\begin{aligned} (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ &= a - \frac{c}{a} x \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad \text{أى أن} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1$$

$$\text{ومن العلاقة } b^2 = a^2 - c^2 \text{ نجد أن } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

وهى تمثل قطع ناقص محوره الكبر ينطبق على محور  $x$  ومركزه ينطبق على نقطة الأصل .

وبالمثل يمكن استنتاج معادلة القطع الناقص الذي ينطبق محوره الأكبر على محور الصادات ومحوره الأصغر على محور السينات ومركزه هو نقطة الأصل

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ وهى}$$

مثال (١) ارسم القطع  $2x^2 + y^2 = 4$  موضحاً موقع بؤرتاه .

**الحل**

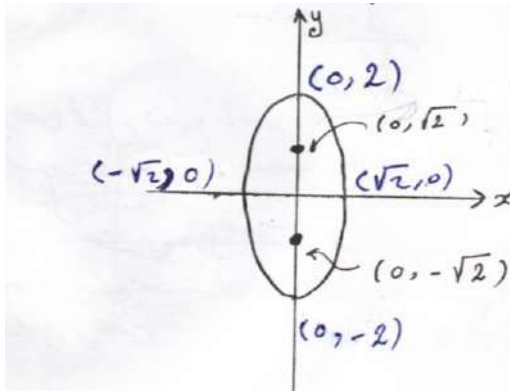
بقسمة المعادلة على 4 نحصل على  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$  وهذه معادلة قطع ناقص له

$$b^2 = 2 \quad (b = \sqrt{2}) \quad , \quad a^2 = 4 \quad (a = 2)$$

وحيث أنه  $a^{-2}$  هو معامل  $y^2$  ، فإن المحور الأكبر منطبق على محور  $y$  وحيث أن

$$C^2 = a^2 - b^2 \quad , \quad C^2 = 4 - 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad C = \sqrt{2}$$

وبذلك يكون إحداثيات البؤرتان هما  $(0, \sqrt{2})$  ،  $(0, -\sqrt{2})$



مثال (٢) أوجد معادلة القطع الناقص الذى له البؤرتان  $(0, \pm 2)$  ونهايتا محوره الأكبرهما  $(0, \pm 4)$  .

### الحل

واضح من إحداثيات البؤرتان ونهايتا المحور الأكبر أن معادلة القطع

$$\text{على الصورة } 1 = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} \text{ ومن المعطيات فى رأس المسألة نجد أن } a = 4, c = 2$$

$$\text{وحيث أن } b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 4 = 12$$

$$\text{إذن معادلة القطع هى } \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$$

معادلة القطع الناقص الذى يوازي محوره المحاور الأصلية ومركزه نقطة أخرى غير نقطة الأصل .

إذا كانت إحداثيات مركز القطع هى النقطة  $(h, k)$  بالنسبة للمحاور  $xy$  فإننا ننقل نقطة الأصل إلى هذه النقطة أى إلى النقطة  $(h, k)$  وبذلك نحصل على المحاور  $x'y'$  وبذلك تكون معادلة القطع بالنسبة إلى المحاور الجديدة

$$\text{هى } x'y' \text{ or } \frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1 \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

تبعاً لوضع المحور الأكبر موازى لمحور السينات أو الصادات وطبقاً للعلاقة

$$\text{بين الإحداثيات فإن } y' = y - k, \quad x' = x - h$$

$$\text{إذن معادلة القطع بالنسبة للمحاور } x'y \text{ هى } \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

وهذه هى معادلة القطع الناقص محوره موازى لمحور  $x$  ومركزه النقطة

$$(h, k).$$

$$\text{وبالمثل } \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

هذه معادلة قطع ناقص محوره موازياً لمحور  $y$  ومركزه هو النقطة  $(h, k)$ .

$$\text{مثال (٣) ارسم القطع } 16x^2 + 9y^2 - 64x - 54y + 1 = 0$$

وأوجد إحداثيات بؤرتاه .

## الحل

سنعيد كتابة المعادلة كما يلي

1

$$x^2 - 64x + (6y^2 - 54y) = - (16)$$

$$16 (x^2 - 4x + 4) + 9 (y^2 - 6y + 9) = -1 + 64 + 81$$

$$16 (x - 2)^2 + 9 (y - 3)^2 = 144$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

وهذه معادلة قطع ناقص مركز النقطة ( 2 , 3 ) ومحوره الأكبر موازياً لمحور

$$a^2 = 16, \quad b^2 = 9 \quad \text{حيث } y$$

$$\therefore c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

إذن البؤرتان تقعان على بعد  $\sqrt{7}$  من المركز وحيث أن المحور رأسى إذن

$$\text{إحداثيات البؤرتان هما } (2, 3 + \sqrt{7}) \quad , \quad (2, 3 - \sqrt{7})$$

الاختلاف المركزى للقطع الناقص هو  $e = \frac{c}{a}$  وحيث أن  $c < a$  فإن

$$0 < e = \frac{c}{a} < 1$$

ملحوظة : للقطع الناقص أربعة رؤوس هى نقط تقابل محاوره مع منحنى القطع.

مثال (٤) أوجد معادلة القطع الناقص الذى مركزه عند النقطة ( 2 , -3 ) و

أحد بؤرتيه هى ( 2 , 3 ) وإحدى رؤوسه عند النقطة ( 2 , 8 ) .

## الحل

واضح أن المحور الأكبر يوازي محور  $y$  . إذن المعادلة تكون على الصورة

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$a = 8 - (-3) = 11, \quad c = 3 - (-3) = 6$$

حيث

$$\therefore h = 2, \quad k = 3$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 121 - 36 = 85$$

إذن المعادلة المطلوبة هي  $\frac{(x-2)^2}{85} + \frac{(y+3)^2}{121} = 1$

وتكون البؤرة الثانية هي  $(-9, 2)$  والرأس الأخرى  $(-14, 2)$   
أوجد إحداثيات الرأس الأخرى ؟

### تمارين

[١] فى التمارين التالية ارسم القطع موضحاً مواضع البؤرتان وكذلك إحداثيات نهايتا كل من المحور الأكبر والأصغر :

- a)  $x^2 + 3y^2 = 2$
- b)  $16x^2 + 4y^2 = 1$
- c)  $9(x-1)^2 + 16(y-3)^2 = 144$
- d)  $5x^2 + 9y^2 - 20x + 54y = -56$

[٢] فى التمارين التالية أوجد معادلة القطع الناقص التى تحقق الشروط المعطاه :

أ- نهايتا محوره الأكبر  $(0, \pm 3)$  ونهايتا محوره الأصغر  $(\pm 2, 0)$  .

ب - طول محوره الأكبر 26 وإحداثيات بؤرتاه  $(0, \pm 5)$  .

ج - البؤرتان  $(\pm 1.0)$  ,  $b = \sqrt{2}$

د- نهاية المحور الأكبر  $(\pm 6.0)$  ويمر بالنقطة  $(2, 3)$  .

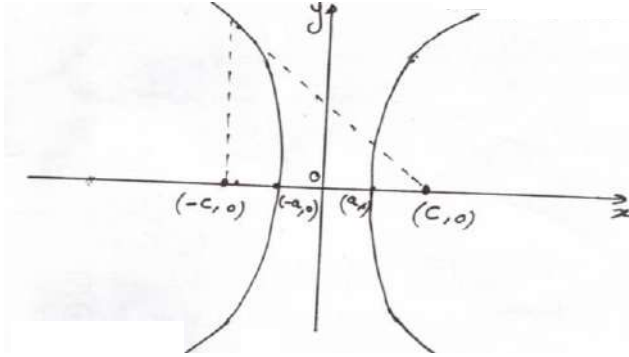
هـ - مركزه نقطة الأصل وتطبق محاوره على محاور الإحداثيات ويمر بالنقطتين  $(1, 6)$  ,  $(3, 2)$



## الباب السابع

### القطع الزائد

تعريف : القطع الزائد هو المحل الهندسى لنقطة تتحرك بحيث يكون الفرق بين بعديهما عن نقطتين ثابتتين يساوى مقدار ثابت .



النقطتين الثابتتين . هما البؤرتان والخط المستقيم الواصل بينهما هو محور القطع ويسمى بالمحور القاطع . ومنتصف المحور القاطع هو مركز القطع. والعمودى عليه وماراً بالمركز يسمى بالمحور المرافق والمحور القاطع يقابل القطع فى نقطتين تسمى كل منهما برأس القطع وللقطع الزائد فرعان متماثلان بالنسبة للمحاور ( محاور القطع ) . انظر الشكل السابق

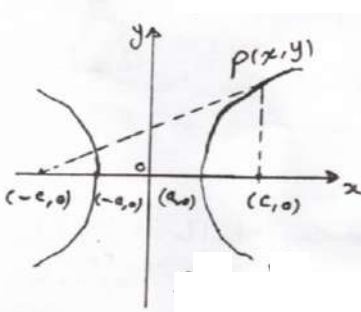
كما هو معتاد سنفرض أن المسافة بين بؤرتى القطع  $2c$  ونعرف المقدار  $b$

$$= \sqrt{c^2 - a^2}$$

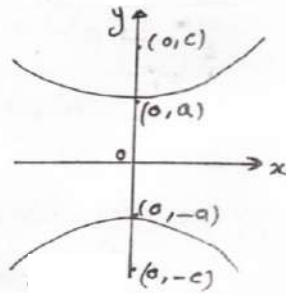
إذا كانت  $V(a, 0)$  أحد رؤوس القطع ، إذن ( كما هو واضح من الشكل ) المسافة بين الرأس والبؤرة البعيدة مطروحاً منها المسافة بين الرأس  $V$  والبؤرة القريبة هى  $(a + c) - (c - a) = 2a$

وبالمثل يكون لجميع النقط التى تقع على القطع تكون المسافة من أى نقطة إلى البؤرة البعيدة مطروحاً منها المسافة من هذه النقطة إلى البؤرة القريبة

مقدار ثابت يساوى  $2a$  . ومعادلة القطع تأخذ أبسط صورها إذا أنطبقت محاور القطع على محاور الإحداثيات ومركزه على نقطة الأصل . وهنا ينتج حالتان إما أن ينطبق المحور القاطع على محور  $x$  والمحور المرافق على محور  $y$  أو العكس ( إنظر الشكل الآتى ) .



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

لاستنتاج المعادلة  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  للقطع الزائد الذى محوره القاطع ينطبق على محور  $x$ .

نفرض أن  $P(x, y)$  أى نقطة على القطع إذن المسافة من  $P$  إلى البؤرة البعيدة  $f_2$  مطروحاً منها المسافة من  $P$  إلى البؤرة القريبة  $f_1$  تساوى  $2a$  أى أن

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

بتربيع الطرفين :

$$(x+c)^2 + y^2 + (x-c)^2 + y^2 - 2\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \quad \text{وبالاختصار نحصل على :}$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 \quad \therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

وفى حالة ما إذا كان محوره القاطع منطبق على محور  $y$  فإن المعادلة لها

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{الصورة}$$

### الخطوط التقريبية للقطع الزائد

نظرية ١- القطع الزائد  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  له الخطان التقاربين  $y = \pm \frac{b}{a} x$

٢- القطع الزائد  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  له الخطان التقاربين  $y = \pm \frac{a}{b} x$

### البرهان

سوف نثبت (١) ، إثبات (٢) بنفس الطريقة نكتب المعادلة

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2} (x^2 - a^2)$$

فى الربع الأول من مستوى الإحداثيات (  $x \geq 0$  &  $y \geq 0$  ) يكون لدينا المسافة الرأسية بين الخط المستقيم  $y = \frac{b}{a} x$  والقطع الزائد يمكن كتابتها على

$$\text{الصورة} \quad \frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

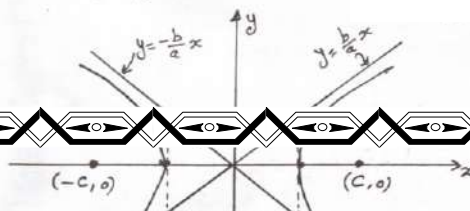
ولكن هذه المسافة تؤول إلى الصفر عندما تؤول إلى ما لا نهاية حينئذ

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b (x - \sqrt{x^2 - a^2}) (x + \sqrt{x^2 - a^2})}{a (x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0$$

وكذلك بالنسبة للخط التقاربى  $y = -\frac{b}{a} x$  يمكن إثبات أن المسافة الرأسية بينه

وبين القطع تؤول إلى الصفر عندما تؤول  $x$  إلى ما لا نهاية

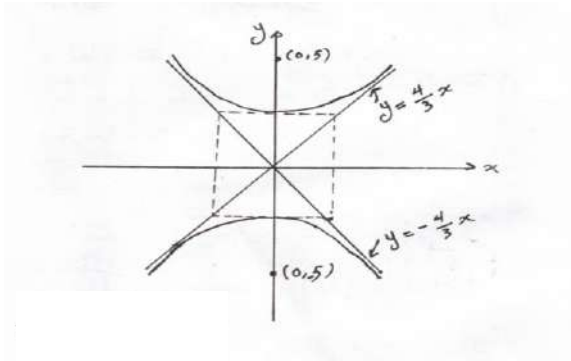


مثال (١) أوجد البؤرتان والرأسان والخطوط التقريبية للقطع الزائد

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

الحل

حيث أن إشارة (-) تسبق  $y^2$  فإن بؤرتا القطع تقعان على محور  $x$  . وبما أن  $a = 4$  فإن الرأسان هما  $(0, 4)$  ,  $(0, -4)$



$$\therefore C = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

فإن البؤرتان هما  $(0, 5)$  ,  $(0, -5)$

والخطان التقاربيان هما  $y = \pm \frac{4}{3}x$

مثال (٢) أوجد معادلة القطع الزائد الذى تقع رأساه عند  $(0, \pm 8)$  وله

الخطان التقريبيان  $y = \pm \frac{4}{3}x$

الحل

حيث أن الرأسان يقعان على محور  $y$  فإن معادلة القطع على الصورة

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

وخطاه التقريبيان على الصورة  $y = \pm \frac{a}{b} x$

من موقع رأس القطع فإن  $a = 8$  ومعادلة الخط التقريبي هي

$$b = 6 \quad y = \frac{a}{b} x = \frac{8}{6} x = \frac{4}{3} x$$

إذن معادلة القطع هي  $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$

إذا كان مركز القطع عند النقطة  $(h, k)$  وكان محورا موازيان لمحاور الإحداثيات : فإن معادلة القطع الزائد تأخذ إحدى الصورتين :

أ - مركز القطع عند النقطة  $(h, k)$  ومحوره القاطع يوازي محور  $x$  :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

ب - مركز القطع عند النقطة  $(h, k)$  ومحوره القاطع يوازي محور  $y$  :

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

ملحوظة : يمكن الحصول على صورة الخطوط التقريبية من معادلة القطع الزائد وذلك بوضع صفراً بدلاً من 1 في الطرف الأيمن من معادلة القطع وإيجاد  $y$  بدلالة  $x$ .

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{فمثلاً}$$

بوضع صفر بدلاً من 1 نجد أن

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a} x$$

وبالمثل لإيجاد معادلتا الخطان التقريبيان للقطع (1) أو (2) .

مثال (٣) بين أن المنحنى  $x^2 - y^2 - 4x + 8y - 21 = 0$

هو قطع زائد . وأرسمه وأوجد بؤرتاه والخطوط التقريبية .

### الحل

أولاً : يجب إعادة كتابة المعادلة المعطاة على إحدى الصورتين (1) ، (2) ،

$$(x^2 - 4x) - (y^2 - 8y) = 21$$

$$(x-2)^2 - (y-4)^2 = 21 + 4 - 16 = 9$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

وهذه المعادلة على الصورة (1) . إذن مركز القطع هو النقطة (2 ، 4)

والمحور القاطع يوازي محور السينات ، وحيث أن  $a = 3$  فإن الرأسان تقعان

على بعد 3 وحدات إلى اليمين وإلى اليسار من المركز أى أن الرأسان هما (-1 ، 4) ، (5 ، 4)

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

فإن البؤرتان تبعدان عن المركز بمقدار  $3\sqrt{2}$  وحده من اليمين وإلى اليسار من

المركز أى أن البؤرتان هما  $(2 - 3\sqrt{2} , 4)$  ،  $(2 + 3\sqrt{2} , 4)$  ولإيجاد

معادلتا الخطان التقريبيين نضع الطرف الأيمن فى المعادلة يساوى صفراً أى أن

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{9} = 0$$

$$y - 4 = \pm (x - 2) \Rightarrow$$

$$y = x + 2 , y = -x + 6$$

وهاتان المعادلتان هما معادلتا الخطان التقريبيان ونلاحظ أن الخطان التقريبيان

متعامدان وفى هذه الحالة يسمى القطع الزائد بالقطع الزائد القائم .

### تمارين

[١] أوجد إحداثيات البؤرتان والرؤوس ومعادلة الخطوط التقريبية للقطاعات التالية

(a)  $4y^2 - 4x^2 = 1$

(b)  $16x^2 - 25y^2 = 400$

(c)  $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{4} = 1$

(d)  $\frac{(y+4)^2}{3} - \frac{(x-2)^2}{5} = 18$

(e)  $(y+3)^2 - 9(x+2)^2 = 36$

(f)  $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$

[٢] أوجد معادلة القطع التي تحقق الشروط التالية

(a) الرأسان  $(\pm 2, 0)$  والبؤرتين  $(\pm 3, 0)$  .

(b) الرأسان  $(\pm 1, 0)$  والخطان التقريبيان  $y = \pm 2x$

(c) البؤرتان  $(0, \pm 5)$  والخطان التقريبيان  $y = \pm 2x$

(d) يمر بالنقطة  $(5, 9)$  والخطان التقريبيان  $y = \pm x$

٢٥٣

تمت بحمد